UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
TD 2 - ZÉROS ISOLÉS, FORMULE ET INÉGALITÉS DE CAUCHY

PASCAL J. THOMAS

Les exercices marqués d'une astérisque (*) ne sont pas essentiels, ou destinés à ceux qui veulent approfondir la théorie.

1. Dérivabilité complexe

1.1. Soit f une fonction holomorphe ($\mathbb{C}$-dérivable en tout point) sur un ouvert Ω.

(1) Si f est à valeurs réelles, montrer que f est constante au voisinage de tout point.
(2) Si $|f(z)| = 1$ pour tout z, montrer que f est constante au voisinage de tout point.
(3) Si on ajoute l'hypothèse que Ω est connexe, montrer que f est constante sur tout Ω.

1.2. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(z) = c + g(z)$, où c est une constante réelle.

NB: vous devrez peut-être utiliser le principe du prolongement analytique.

2. Zéros isolés, prolongement analytique

2.1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ et $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

2.2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1/r$, $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$ et $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$.

2.3. Soit f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$. On suppose que $|f(z)| \leq e^{-1/|z|}$. Montrer que f est identiquement nulle.

2.4. (*) Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1/r$, $f(\dfrac{1}{n}) = e^{-n}$.

Indication : si $f \not\equiv 0$, considérer le plus petit indice k tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$.

2.5. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0, r)$ avec $r > 0$ telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z \in D(0, r)$.

Indications : calculer la dérivée de la fonction z en 0.

2.6. Soient f, g deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe Ω. On suppose que $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer alors que soit $f \equiv 0$ soit $g \equiv 0$ sur Ω.

2.7. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur $\Omega := D(0,r) \setminus \{0\}$ (avec $r > 0$) telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z \in \Omega$.

a) On pose $\Omega_1 := D(0,r) \setminus]-r,0]$ et $r_1(z) := \exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, z)$, $r_2(z) := -\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, z)$. Montrer qu'il existe $j \in \{1,2\}$ tel que $f(z) = r_j(z)$ pour tout $z \in \Omega_1$ (indication : exercice 2.6).

b) En déduire que f ne peut pas être continue au point $-\frac{1}{2}$.

3. Formule et Inégalités de Cauchy

3.1. Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier telle qu'il existe $A, B > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq A|z|^m + B$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

3.2. a) Soit f une fonction analytique sur $D(0,r)$ avec $r > 1$. Soit γ la courbe qui parcourt une fois le cercle unité dans le sens trigonométrique. Montrer que $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Indication : appliquer la formule de Cauchy à $g(z) := zf(z)$.

b) Soit P un polynôme (en z). Montrer que $\max_{|z|=1} |\bar{z} - P(z)| \geq 1$. Indication : multiplier par z et intégrer sur le cercle pour trouver une contradiction...

3.3. Soit f une fonction analytique sur C tout entier. On suppose que pour tout $r > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq r^{17/3}.$$

Montrer que f est identiquement nulle. (Indication : considérer $r \to 0$ et $r \to \infty$).

3.4. Soit f une fonction analytique sur C tout entier. On suppose que $\mathrm{Re}\, f(z) \geq 0$ pour tout z. Montrer que f est constante.

Indication : considérer la fonction $g(z) = 1/(1 + f(z))$.