UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2020-21
TD 1 - $\mathbb{C}$-DÉRIVABILITÉ, INTÉGRALES DE CHEMINS

PASCAL J. THOMAS

Les exercices marqués d'une astérisque (*) ne sont pas essentiels, ou destinés à ceux qui veulent approfondir la théorie.

1. Nombres complexes et exemples de fonctions

1.1. Vérifier que $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Trouver une expression similaire pour $\operatorname{Im} z$. Indication : calculer $\operatorname{Re}(iz)$.

1.2. Montrer que l'équation de toute droite du plan complexe peut s'écrire sous la forme $\operatorname{Re}(a(z-b)) = 0$, où a et b sont des nombres complexes (pas uniques). Indication : commencer par le cas des droites passant par 0. Penser aux coordonnées polaires.

1.3. Pour quels nombres complexes (a, b, c) l'équation $az + b\bar{z} + c = 0$ représente-t-elle une droite du plan ? Indications : on peut tout mettre en parties réelles et imaginaires et considérer deux équations réelles. Ou on peut se souvenir que si un nombre complexe est nul, alors son conjugué est nul aussi, et travailler avec deux équations sur le corps $\mathbb{C}$.

1.4. (a) Montrer que l'équation de toute cercle du plan complexe peut s'écrire sous la forme $|z-a|^2 = r^2$, où a est un nombre complexe, r un nombre réel positif. Développer cette équation comme un polynôme de degré 2 en z et $\bar{z}$, en se souvenant que $w\bar{w} = |w|^2$.

*(b) La première question était trop facile ! On se donne une équation de la forme $z\bar{z} + az + b\bar{z} + c = 0$. Quand représente-t-elle un cercle ? Dans ce cas, calculer le centre et le rayon en fonction des coefficients a, b, c.

1.5. Calculer l'image par $z \mapsto 1/(1-z)$ du cercle $\{|z| = 1\}$.

1.6. Quelle est l'image par l'application $z \mapsto 1 + 1/z$ d'une droite ? On excluera éventuellement le point 0. (Indication : Utiliser une équation de la forme donnée dans l'exercice 1.2; on peut aussi utiliser une représentation paramétrique, mais la courbe obtenue sera plus difficile à identifier).

1.7. En quels points $a \in \mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto |z|^2 = z\bar{z}$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

1.8. Quelle est l'image par l'application $z \mapsto e^z$ de l'ensemble
$\{z = x + iy : x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$?

1.9. On suppose que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(a, r)$, $\mathbb{C}$-dérivable, à valeurs réelles. Montrer que f est constante.

(*) Même question si f est de module constant.

1.10. (a) Montrer que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes au fait que la forme $f(z)dz$ est fermée, c'est-à-dire en écrivant $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$, associée au vecteur $V = (f(z), if(z))$, qu'elle satisfait la condition sur les dérivées croisées, donc que V est localement le gradient d'une fonction $F(z)$.

(*) (b) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathbb{C}$-dérivable en a, alors $\Delta f(a) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 0.$$

Application : lesquelles parmi ces fonction peuvent être la partie réelle d'une fonction f qui soit $\mathbb{C}$-dérivable ?

$$x, \quad x^2, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2, \quad e^x, \quad e^x \cos y, \quad e^x \sin y.$$

1.11. (*) Exprimer les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, c'est-à-dire par rapport aux quantités $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

2. Intégrales de chemins

2.1. On rappelle les formules d'addition des sinus et cosinus :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

et la formule de De Moivre $(\cos a + i \sin a)^m = \cos(ma) + i \sin(ma)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

On considère le chemin γ donné par $t \mapsto \gamma(t) := \cos t + i \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Calculer $\int_\gamma z^m dz$, pour $m \in \mathbb{Z}$.

Refaites ce calcul plus vite en utilisant la Proposition 9 du cours (quand c'est possible).

2.2. Soit γ le cercle de rayon r autour de 0, c'est-à-dire $\gamma(t) := re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Calculer $\int_\gamma z^{-1} dz$. Que remarquez-vous ?

2.3. (*) On considère la courbe γ obtenue par la concaténation des 4 segments de droite suivants :

$$\gamma_1(t) := 1 + it, -1 \le t \le 1; \quad \gamma_2(t) := 2 - t + i, 1 \le t \le 3;$$
$$\gamma_3(t) := -1 - i(t-4), 3 \le t \le 5; \gamma_4(t) := t - 6 - i, 5 \le t \le 7.$$

Calculer $\int_\gamma z^{-1} dz$.