UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2019-20
TD 1 - ANALYTICITÉ, $\mathbb{C}$-DÉRIVABILITÉ, EXEMPLES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

PASCAL J. THOMAS

Les exercices marqués d'une astérisque (*) ne sont pas essentiels, ou destinés à ceux qui veulent approfondir la théorie.

1. Séries entières

1.1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :
$$(a) \sum 2^{(-1)^n} z^n, \quad (a') \sum 2^{(-1)^n n} z^n, \quad (b) \sum n! z^n, \quad (c) \sum_n q^{n^2} z^n, \text{ où } |q| < 1, \quad (d) \sum z^{n!}.$$

1.2. Calculer le développement en série entière autour du point 0 de la fonction $f(z) = \frac{1}{(1-z)^m}$, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$. Indication : dérivées.

1.3. (*) Montrer la formule de Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_k z^k$, à savoir
$$R = \frac{1}{\limsup_k |a_k|^{1/k}}.$$
Indications : on pose $L := \limsup_k |a_k|^{1/k}$. Alors si $r < L^{-1}$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $L < L + \varepsilon < r^{-1}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $|a_k| \leq (L+\varepsilon)^k$ et conclure que $R \geq L^{-1}$. Procéder de façon analogue pour montrer que $R \leq L^{-1}$.

1.4. (*) Montrer que si f est une fonction analytique en a (c'est-à-dire développable en série entière autour du point a), alors la suite $\left(\frac{1}{k}\log\left(\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\right)\right)$ est bornée supérieurement.

2. Exemples de fonctions analytiques et dérivabilité complexe

2.1. On suppose que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(a,r)$, $\mathbb{C}$-dérivable, à valeurs réelles. Montrer que f est constante. Même question si f est de module constant.

2.2. (a) Montrer que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes au fait que la forme $f(z)dz$ est fermée, c'est-à-dire en écrivant $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$, associée au vecteur $V = (f(z), if(z))$, qu'elle satisfait la condition sur les dérivées croisées, donc que V est localement le gradient d'une fonction $F(z)$.

(b) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathbb{C}$-dérivable en a, alors $\Delta f(a) = 0$, c'est-à-dire
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 0.$$
Application : lesquelles parmi ces fonction peuvent être la partie réelle d'une fonction f qui soit $\mathbb{C}$-dérivable ?
$$x, \quad x^2, \quad x^2+y^2, \quad x^2-y^2, \quad e^x, \quad e^x\cos y, \quad e^x \sin y.$$

2.3. Exprimer les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, c'est-à-dire par rapport aux quantités $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

2.4. On note $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Montrer que

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\cosh 2y + \cos 2x\right).$$

Déterminer tous les nombres *complexes* z tels que $\cos z = 0$.

2.5. Pour quels nombres complexes (a, b, c) l'équation $az + b\bar{z} + c = 0$ représente-t-elle une droite du plan ?

2.6. Montrer que la fonction cos est bijective de l'ouvert $B := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ vers l'ouvert $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. Calculer la fonction inverse à partir d'une détermination du logarithme.

2.7. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z$. Indication (à démontrer) :

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) z^p.$$

2.8. (*) Nous allons montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver une fonction *continue* L sur $D(0,2) \setminus \{0\}$ telle que $e^{L(z)} = z$. Supposons qu'une telle L existe.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $L(1) = 0$ en considérant la fonction $L - i \operatorname{Im} L(1)$.

b) Montrer que l'ensemble $A := \{\theta \in [0, \pi] : \operatorname{Im} L(e^{i\theta}) = \theta$ est fermé (c'est-à-dire stable par limites de suites).

c) Montrer que l'ensemble A est ouvert, c'est-à-dire que pour tout $\theta \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que $]\theta - \delta, \theta + \delta[\subset A$. Indication : si $\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) \neq \theta$, alors $|\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) - \theta| \geq 2\pi$.

d) Conclure que $A = [0, \pi]$.

e) Montrer de même que pour tout $\theta \in [-\pi, 0]$, $\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) = \theta$. Conclure.

2.9. (*) Montrer que la fonction $z \mapsto \cos\sqrt{z}$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ en posant $\sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z)$, peut s'étendre en une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$, et donner son développement en série entière.

2.10. Calculer l'image par $z \mapsto 1/(1-z)$ du cercle $\{|z| = 1\}$.

Définition 2.1. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ avec $(c, d) \neq (0, 0)$, une *homographie* est l'application $\varphi : S \longrightarrow S$ definie par

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \text{ if } z \in \mathbb{C}, cz+d \neq 0, \\ \varphi(\infty) &= \frac{a}{c} \text{ if } c \neq 0, \quad \varphi(\infty) = \infty \text{ if } c = 0, \\ \varphi(-\frac{d}{c}) &= \infty \text{ if } c \neq 0. \end{aligned}$$

Démontrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle. Comment peut-on décider si on a affaire à un cas ou à l'autre ?