UPS L3 PS Analyse Complexe 2

Solution du CP du 13-11-2019

1 a) f est continue sur $\overline{D}(0,1) \setminus \{0\}$, z^2 aussi, et $z^2 \neq 0$ pour tout $z \neq 0$, donc

$z \longmapsto \frac{f(z)}{z^2}$ est continue sur $\overline{D}(0,1) \setminus \{0\}$.
(Thm : un quotient de fcns continues est continu ...)

f étant analytique, pour tout $z \in D(0,1)$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Mais $a_0 = f(0) = 0$,

$a_1 = f'(0) = 0$, donc $f(z) = z^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-2}$,

d'où $\frac{f(z)}{z^2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-2}$ pour $z \neq 0$ et

$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z^2} = a_2 = \frac{1}{2} f''(0) = g(0)$.

Donc g est continue en 0, et $g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^{k-2}$ pour tout $z \in D(0,1)$, donc g est analytique sur $D(0,1)$ (car la somme d'une série entière est une fonction analytique).

b) g est analytique sur $D(0,1)$ et continue sur $\overline{D}(0,1)$ donc $\max_{z \in \overline{D}(0,1)} |g(z)| = \max_{|z|=1} |g(z)|$

d'après le Corollaire du Principe du Maximum.

Or pour $|z| = 1$, on a $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^2} = |f(z)| \leq 1$.

Donc pour tout $z \in \overline{D}(0,1)$, $|g(z)| \leq 1$,

et en particulier pour $z \neq 0$, $|f(z)| \leq |z|^2$.

Pour $z = 0$, $|f(z)| = 0 = |z|^2$. cqfd.

2) a) $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ d'après le cours.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, d'après le théorème de Schwarz, $\displaystyle \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Il reste donc

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta f, \quad \text{cqfd.}$$

b) On calcule $\displaystyle 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} \log\left(\varepsilon^2 + f(z)\overline{f(z)}\right)$.

$$= 4 \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(f(z)\overline{f(z)}\right)}{\varepsilon^2 + f(z)\overline{f(z)}}\right\}$$

Or f est holomorphe, donc $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(f(z)\right) = 0$

et $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\overline{f(z)}\right) = \overline{\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)} = \overline{f'(z)}$.

Il vient donc $$= 4 \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{f(z)\overline{f'(z)}}{\varepsilon^2 + f(z)\overline{f(z)}}\right\}.$$

$$= 4\left\{\frac{f'(z)\overline{f'(z)}}{\varepsilon^2 + f(z)\overline{f(z)}} - f(z)\overline{f'(z)}\left(\varepsilon^2 + f(z)\overline{f(z)}\right)^{-2} f'(z)\overline{f(z)}\right\}$$

car : $\displaystyle \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{f'(z)}\right) = \overline{\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(f'(z)\right)} = \bar{0} = 0,$

car $f'(z)$ est holomorphe donc $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \bar z} f'(z) = 0$;

de même $\displaystyle \frac{\partial}{\partial z}\left(f(z)\overline{f(z)}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)\,\overline{f(z)}$ $\left(\text{car } \displaystyle \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{f(z)}\right) = 0\right)$

$$= f'(z)\,\overline{f(z)}.$$

On réduit au même dénominateur :

$$= 4\,\frac{f'(z)\overline{f'(z)}\left(\varepsilon^2+f(z)\overline{f(z)}\right)-f(z)\overline{f(z)}\,f'(z)\overline{f'(z)}}{\left(\varepsilon^2+f(z)\overline{f(z)}\right)^2}$$

$$=\frac{4\varepsilon^2\,|f'(z)|^2}{\left(\varepsilon^2+|f(z)|^2\right)^2}.$$

3. a) D'après le théorème de Morera, si f est holomorphe sur Ω, et $T\cup\hat{T}\subset\Omega$, alors $\int_T f(z)\,dz=0$.

On l'applique ici avec $\Omega=D(0,1)\setminus\{0\}$.

b) 

D'après sa définition, $\hat{Q}_\varepsilon\subset\hat{T}\subset D(0,1)\setminus\{0\}$

et si T est un triangle non dégénéré, $Q_\varepsilon\subset T\cup\hat{T}\setminus\{0\}\subset D(0,1)\setminus\{0\}$.

On considère les 2 triangles $(\varepsilon A, A, B)$ et $(B,\varepsilon B,\varepsilon A)$.

alors $\displaystyle\int_{(\varepsilon A,A,B)} f(z)\,dz+\int_{(B,\varepsilon B,\varepsilon A)} f(z)\,dz$

$$=\int_{[\varepsilon A;A]}+\int_{[A;B]}+\int_{[B;\varepsilon A]}+\int_{[B,\varepsilon B]}+\int_{[\varepsilon B,\varepsilon A]}+\int_{[\varepsilon A;B]} f(z)\,dz$$

mais $[B;\varepsilon A]$ et $[\varepsilon A;B]$ sont le même segment parcouru dans deux sens opposés, donc $\displaystyle\int_{[B,\varepsilon A]}+\int_{[\varepsilon A;B]} f(z)dz=0$,

donc il reste $\displaystyle\int_{[\varepsilon A;A]}+\int_{[A;B]}+\int_{[B;\varepsilon B]}+\int_{[\varepsilon B,\varepsilon A]} f(z)=\int_{Q_\varepsilon} f(z)\,dz$

D'autre part, comme chacun des 2 triangles $(\varepsilon A,A,B)$ et $(B,\varepsilon B,\varepsilon A)$ sont contenus dans $\hat{Q}_\varepsilon\cup Q_\varepsilon\subset D(0,1)\setminus\{0\}$, donc

$$\int_{Q_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{(\varepsilon A, A, B)} f(z)\,dz + \int_{(B, \varepsilon B, \varepsilon A)} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0.$$

Pour tout ε, $\int_T f(z)\,dz - \int_{Q_\varepsilon} f(z)\,dz$

$$= \int_{[0,A]} + \int_{[A,B]} + \int_{[B,0]} - \int_{[\varepsilon A; A]} - \int_{[A,B]} - \int_{[B;\varepsilon B]} - \int_{[\varepsilon B, \varepsilon A]} f(z)\,dz$$

$$= \int_{[0,A]} - \int_{[\varepsilon A; A]} + \int_{[B;0]} - \int_{[B;\varepsilon B]} - \int_{[\varepsilon B, \varepsilon A]} f(z)\,dz$$

$$= \int_{[0;\varepsilon A]} + \int_{[\varepsilon B;0]} - \int_{[\varepsilon B;\varepsilon A]} f(z)\,dz.$$

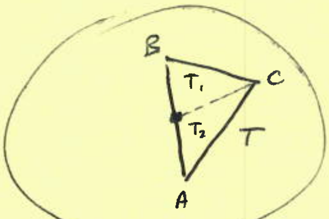
f est continue en 0, donc bornée par M dans un voisinage U de 0. Pour ε assez petit, $[0;\varepsilon A]$, $[\varepsilon B;0]$, $[\varepsilon B, \varepsilon A] \subset U$, et leurs longueurs sont toutes $\leq 2\varepsilon$.

Donc chaque intégrale est bornée par $2\varepsilon M$.

Au total, la somme $\to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Par conséquent, $\int_T f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$ d'après la première partie.

c)



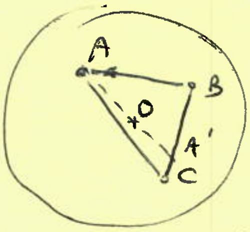
Supposons que $0 \in [A;B]$

Posons $T_2 = (A, 0, C)$, $T_1 = (0, B, C)$.

Alors $\int_{T_1} + \int_{T_2} f(z)\,dz = 0$ car les intégrales $\int_{[0;C]}$ et $\int_{[C;0]}$ se simplifient.

(Mais d'après b), $\int_{T_1} f(z)\,dz = \int_{T_2} f(z)\,dz = 0$, donc $\int_T f(z)\,dz = 0$.

d)



Soit A' le point d'intersection de $[B;C]$ et de la droite (AO).

Alors $T_1 = (A, A', C)$ et $T_2 = (A, B, A')$ sont deux triangles avec O sur un de leurs côtés

donc $\int_{T_1} f(z)\,dz = \int_{T_2} f(z)\,dz = 0$; et

$$\int_{(A,B,C)} f(z)\,dz = \int_{T_1} + \int_{T_2} f(z)\,dz = 0.$$

e) Les questions a) à d) montrent que pour tout triangle T tel que $T \cup \hat{T} \subset D(0,1)$, $\int_T f(z)\,dz$. De plus f est continue.

On déduit du théorème de Morera (direction réciproque) que f est holomorphe sur D.