UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
DEVOIR À LA MAISON
À RENDRE LE 12 DÉCEMBRE 2017

Les trois exercices sont indépendants.

1. On pose $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, muni de la topologie qui est telle qu'une base de voisinages de ∞ est donnée par les ensembles $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$, $R > 0$, et qui induit la topologie usuelle sur $\mathbb{C}$.

On appelle inversion l'application $\mathcal{I}$ définie par $\mathcal{I}(z) = 1/z$ pour $z \neq 0$ et $\mathcal{I}(0) = \infty$, $\mathcal{I}(\infty) = 0$. On dit qu'une fonction f est holomorphe (c'est-à-dire analytique) au voisinage de ∞ si et seulement si $f \circ \mathcal{I}$ est holomorphe au voisinage de 0.

Nous voulons trouver tous les automorphismes (bijections holomorphes) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit f une bijection holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Indication : l'application réciproque f^{-1} est une application continue.

En déduire que $f \circ \mathcal{I}$ admet un pôle en 0, et donc que f est un polynôme.

b) En considérant $\mathcal{I} \circ f \circ \mathcal{I}$ au voisinage de 0, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$.

c) Si nous étendons la définition d'application holomorphe aux valeurs infinies (en considérant $\mathcal{I} \circ f$ près d'un pôle de f), et que f est une bijection holomorphe de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, montrer qu'il existe une homographie h telle que $h \circ f|_{\mathbb{C}}$ soit une bijection holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

d) Quelles sont les bijections holomorphes de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$?

2. Nous voulons trouver tous les automorphismes (bijections holomorphes) de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, avec $\mathbb{D} := D(0, 1)$. Soit f une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

On rappelle que pour tout point a du disque unité, l'application

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - z\bar{a}}$$

est une bijection biholomorphe du disque unité dans lui-même.

a) Montrer que pour a bien choisi, $f_1 := \varphi_a \circ f$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ telle que $f_1(0) = 0$.

b) En appliquant le Lemme de Schwarz à f_1 et à f_1^{-1}, montrer que $f_1(z) = e^{i\theta} z$ pour un certain θ, et déterminer toutes les bijections biholomorphes du disque unité dans lui-même.

3. On suppose que f est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, pas forcément bijective. Montrer en appliquant le Lemme de Schwarz à $\varphi_b \circ f \circ \varphi_a$, avec b bien choisi, qu'en tout point $a \in \mathbb{D}$,

$$(1 - |a|^2)|f'(a)| \leq 1 - |f(a)|^2.$$

Quand a-t-on l'égalité ?