UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2020-21
CONTRÔLE TERMINAL
MERCREDI 6 JANVIER 2021

Durée du contrôle : **1 heure 30.**

Cette épreuve se compose de 3 exercices indépendants (sur deux pages). Beaucoup des questions au sein de chaque exercice peuvent se traiter indépendamment. Certaines sont des questions de cours. Les solutions de certaines questions sont très courtes.

Justifiez vos réponses par une démonstration ou un résultat du cours.

Barème **approximatif** : 4 – 7 – 9 (respectivement).

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, et f holomorphe sur $D(a, r) \setminus \{a\}$.

(a) Si f admet une singularité essentielle en a, et $m \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction définie par $g(z) := (z - a)^m f(z)$ admet une singularité essentielle en a.

(b) En déduire que : f admet une singularité essentielle en a si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $(z - a)^m f(z)$ n'est bornée dans un aucun voisinage de a.

2. On considère l'ouvert $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ et $z_0 \in H$.

(a) En vertu de quel théorème existe-t-il une unique bijection holomorphe φ de H sur $D(0, 1)$ telle que $\varphi(z_0) = 0$ et $\varphi'(z_0) > 0$?

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - z_0| = |x - \bar{z}_0|$.

(c) On pose $f(z) := \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$. Montrer que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in H$.

(d) Montrer que f définit une bijection holomorphe de H sur $D(0, 1)$.

(e) Trouver la valeur de $\varphi(z)$, où φ répond aux conditions de la question (a).

3. Tout au long de cet exercice, on considère une courbe de Jordan $\mathcal{C}^1$ par morceaux, γ, non-constante, parcourue une fois dans le sens trigonométrique, et dont l'image est le bord $\partial\omega$ d'un ouvert connexe borné ω, avec $\omega \neq \emptyset$. Donc $\hat{\gamma} = \overline{\omega}$. L'exemple le plus simple est le cas où $\omega = D(a, r)$ et γ est le cercle $C(a, r)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

On considère de plus un ouvert connexe Ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, et une fonction f holomorphe sur Ω (donc en particulier holomorphe sur ω et continue sur $\overline{\omega}$), et non constante sur Ω.

Hypothèse : pour tout $z \in \partial\omega$, $|f(z)| = 1$.

(a) Montrer que f doit s'annuler au moins une fois dans ω. Indication : raisonner par l'absurde. Considérer la fonction $\dfrac{1}{f}$.

(b) Question de cours : énoncer le Principe de l'Argument. Vous pouvez, si vous le souhaitez, vous limiter au cas le plus simple où le cycle γ est une courbe de Jordan $\mathcal{C}^1$ par morceaux et où la fonction f n'admet aucun pôle p tel que $\mathrm{Ind}(\gamma, p) \neq 0$.

(c) Montrer que la fonction

$$w \mapsto g(w) := \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

est définie et continue pour $w \in D(0, 1)$.

(d) Montrer que pour tout $w \in D(0, 1)$, la fonction $f_w(z) := f(z) - w$ a le même nombre de zéros dans ω, comptés avec multiplicités, que f.

(e) Montrer que f est surjective de ω sur $D(0, 1)$.