UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
CONTRÔLE TERMINAL
MERCREDI 18 DÉCEMBRE 2019

Durée du contrôle : **2 heures.**

Cette épreuve se compose de 4 exercices indépendants (sur deux pages).
Justifiez vos réponses par une démonstration ou un résultat du cours.
Barème **approximatif** : 4 – 6 – 8 – 6 (respectivement).

1. Montrer que le polynôme $P(z) := z^7 + \frac{z^3}{8} + \frac{1}{1000}$ admet exactement 4 zéros sur l'anneau $A(\frac{1}{2}, 1) := D(0,1) \setminus \overline{D}(0, \frac{1}{2})$.

2. On considère une fonction f holomorphe sur l'anneau $A(R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$, où $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$.
On rappelle qu'elle admet un développement en série de Laurent, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$, qui converge uniformément sur tout compact contenu dans l'ouvert $A(R_1, R_2)$.

a) Montrer que f admet une primitive holomorphe sur $A(R_1, R_2)$ si et seulement si $a_{-1} = 0$.

Indication : montrer que, si γ est un chemin contenu dans $A(R_1, R_2)$, alors

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_\gamma \zeta^k d\zeta.$$

b) Application : on prend $R_1 = 0$, $R_2 = 1$. Dans chacun des cas suivants, dites si f admet une primitive holomorphe sur l'anneau $A(0,1)$ ou non, et pourquoi.

(1) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$.
(2) $f(z) = e^{1/z}$.
(3) $f(z) = e^{1/z^2}$.
(4) f est bornée sur $A(0,1)$.

3. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1,+1]$.

a) Montrer que Ω est connexe.

b) Montrer que Ω n'est pas simplement connexe. Vous pourrez, par exemple, considérer l'intégrale d'une fonction bien choisie sur le cercle $C(0,2)$.

c) Montrer que l'application $z \mapsto 2/(1-z) =: \varphi_1(z)$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$ sur $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1,+\infty))$.

d) Montrer qu'on peut choisir une définition de la racine carrée telle que l'application $z \mapsto (z-1)^{1/2} =: \varphi_2(z)$ soit une bijection holomorphe de $\mathbb{C} \setminus [1,+\infty)$ sur $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Que vaut $\varphi_2(0)$?

e) Trouver une bijection holomorphe φ_3 de $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ sur $D(0,1)$ telle que $\varphi_3(i) = 0$, et montrer que $\varphi := \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ fournit une bijection holomorphe de Ω sur $D(0,1) \setminus \{0\}$. Que vaut $\lim_{z\to\infty} \varphi(z)$?

f) Soit $f_1(z) := 1 - \frac{1}{z^2}$. Montrer que $f_1 \circ \varphi^{-1}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$, qui admet une racine carrée holomorphe sur $D(0,1)$. En déduire que f_1 admet une racine carrée holomorphe sur Ω.

g) Montrer que $f_2(z) := z^2 - 1$ admet une racine carrée holomorphe sur Ω.

4. Nous allons montrer par contradiction qu'il n'existe pas de bijection holomorphe de $D(0,1) \setminus \{0\}$ vers $A(1;2) := \{z : 1 < |z| < 2\}$.

a) Suppose que f est une telle bijection. Montrer que f s'étend en une application $\tilde{f}$ de $D(0,1)$ dans l'adhérence de $A(1;2)$.

b) Montrer que $\tilde{f}(0) \notin A(1;2)$. Indication : supposons $z_0 = \tilde{f}(0) \in A(1;2)$; montrer qu'il existe $z_1 \neq 0$ tel que $f(z_1) = z_0$. Pour $r < \frac{1}{2}|z_1|$, montrer que $\tilde{f}(D(0,r))$ doit contenir un voisinage de z_0 et en déduire une contradiction.

c) Déduire de ce qui précède que $\tilde{f}(0) \in C(0,1) \cup C(0,2)$. Montrer que cette situation mène aussi à une contradiction.