UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2018-19
CONTRÔLE TERMINAL
MERCREDI 9 JANVIER 2019

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce contrôle comporte 5 exercices indépendants.

1. Soit $R > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_\gamma z^m e^{\frac{1}{z}} dz$, où $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

2. (a) Rappeler l'énoncé du théorème de l'application ouverte pour une fonction holomorphe sur un ouvert connexe.

(b) Déduire du théorème de l'application ouverte que si f est holomorphe sur un ouvert connexe et non-constante, alors $\operatorname{Re} f$ n'admet pas de maximum local. Montrer de même que $|f|$ n'admet pas de maximum local.

3. On considère la fonction $f(z) = z^5 + 49z + 64$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que f ne s'annule pas pour $|z| = 3$, et admet exactement 5 zéros (comptés avec multiplicités) dans le disque $D(0, 3)$.

Indication : $3^5 = 243$, $3 \times 49 = 147$.

(b) Montrer que f admet exactement 1 zéro dans $D(0, 2) \setminus \overline{D}(0, 1)$.

Indication : $2^5 = 32$, $2 \times 49 = 98$.

(c) Montrer que f n'admet que des zéros simples (cette question est indépendante des précédentes).

4. (a) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide, tel que $\Omega \neq \mathbb{C}$ et $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Montrer que pour tout $R > |z_0|$, $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cap \{w : |w| = R\} \neq \emptyset$.

(b) Montrer que pour tout cycle γ contenu dans Ω, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\operatorname{Ind}(\gamma; w) = 0$.

(c) En déduire que toute fonction f analytique sur Ω admet une primitive.

5. On rappelle le Lemme de Schwarz : Soit f est une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D} := D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ telle que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $f(0) = 0$. Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \le |z|$ si $z \neq 0$ et $|f'(0)| \le 1$. L'égalité n'est atteinte dans une quelconque de ces inégalités que si $f(z) = e^{i\theta} z$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. On considère $a \in H$. Soit $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{z-\bar{a}}$.

Montrer que si $z \in \mathbb{R}$, $|\varphi_a(z)| = 1$.

Montrer que si $z \in H$, $|\varphi_a(z)| < 1$.

(b) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $f(\mathbb{D}) \subset H$. On suppose que $f(0) = a$. En appliquant le Lemme de Schwarz à $\varphi_a \circ f$, trouver la valeur maximale possible de $|f'(0)|$. Déterminer toutes les fonctions qui l'atteignent.