UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
CONTRÔLE TERMINAL
MARDI 9 JANVIER 2018

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce contrôle comporte 3 exercices indépendants.

1. Soient
$$\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}, \quad f(z) := \frac{1}{z^2 - 1}.$$

a) Soit $\gamma_1(\theta) := 1 + e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculer $\int_{\gamma_1} f(z)dz$.
En déduire que f n'admet pas de primitive (au sens complexe) sur Ω_1.
b) Soit $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus [-1; +1] \subset \Omega_1$.
Soit $\gamma_2(\theta) := 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculer
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz.$$
En déduire que γ_2 n'est pas homotope dans Ω_2 au chemin constant égal à $\gamma_2(0) = 2$. En déduire que Ω_2 n'est pas simplement connexe.
Montrer que $f_1(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur Ω_2 et n'admet pas de primitive sur cet ouvert.
c) On pose $\theta_1(z) := \arg(z - 1)$, $\theta_2(z) := \arg(z + 1)$, où l'argument est défini comme une fonction continue (et infiniment différentiable au sens réel) sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, 2\pi[$.
Montrer que $\theta_2 - \theta_1$ se prolonge en une fonction continue sur Ω_2, notée θ_3.
d) On pose, pour $z \in \Omega_2$,
$$g(z) := \log \left| \frac{z+1}{z-1} \right| + i\theta_3(z).$$
Montrer que $\exp(g(z)) = \frac{z+1}{z-1}$ et que g est continue sur Ω_2.
e) Montrer que g est $\mathbb{C}$-dérivable.
Indication : on peut par exemple écrire
$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{g(z+h) - g(z)}{\exp(g(z+h)) - \exp(g(z))} \frac{\exp(g(z+h)) - \exp(g(z))}{h}.$$
f) Calculer la dérivée de $\exp(g(z))$ et en déduire $g'(z)$. Montrer que f admet une primitive sur Ω_2.

2. a) Le Théorème de Rouché commence ainsi :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient f_1, f_2 analytiques sur Ω avec $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$. On suppose que pour tout $z \in \partial D(a,r)$ (le cercle de centre a et de rayon r),

$$|f_1(z) + f_2(z)| < |f_1(z)| + |f_2(z)|...$$

Quelle conclusion en tire-t-on sur les zéros de f_1 et f_2 dans $D(a,r)$?

b) Soient f, g analytiques sur Ω avec $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$. On suppose que pour tout $z \in \partial D(a,r)$,

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Montrer que f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicités) dans le disque ouvert $D(a,r)$.

c) Dans tout ce qui suit, $(f_n)_n$ est une suite de fonctions analytiques sur Ω, qui converge uniformément vers f sur tout compact de Ω. On rappelle que f est analytique sur Ω.

On suppose désormais que Ω est connexe et f n'est pas identiquement nulle.

Soit $\Omega_1 \subset \Omega$ un ouvert qui possède la propriété suivante : pour tout $n \geq N_1$, pour tout $z \in \Omega_1$, $f_n(z) \neq 0$. Soit $a \in \Omega_1$.

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\bar{D}(a,r) \subset \Omega_1$ et $s := \inf_{z \in \partial D(a,r)} |f(z)| > 0$.

d) Montrer en utilisant le résultat de la question b) que $f(a) \neq 0$ (on redémontre ainsi le théorème de Hurwitz, que l'on est prié de ne pas utiliser pour résoudre cette question).

3. On considère l'ouvert $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Les deux premières questions sont indépendantes du reste de l'exercice.

a) Montrer en utilisant un théorème du cours qu'il existe une unique bijection holomorphe φ de Ω_1 dans le disque unité $\mathbb{D}$, telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) > 0$.

b) Comme $\mathbb{D} \subset \Omega_1$, on peut considérer la restriction de φ à $\mathbb{D}$. Montrer sans calcul que $\varphi'(0) < 1$.

c) Nous allons construire explicitement l'application φ dans les questions qui suivent. On pose tout d'abord $\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$.

Donner une bijection holomorphe (en fait linéaire !) φ_1 de Ω_1 dans Ω_2.

d) On pose $\Omega_3 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Donner une bijection holomorphe φ_2 de Ω_2 dans Ω_3. (Indication : écrire Ω_3 en termes de l'argument de z, pour une détermination bien choisie de l'argument).

e) Donner une bijection holomorphe (en fait une homographie) φ_3 de Ω_3 dans le disque unité $\mathbb{D}$. (Indication : l'axe imaginaire $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$ est la médiatrice des points $+1$ et -1.)

f) A partir de la bijection $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ de Ω_1 dans le disque unité $\mathbb{D}$, construire la bijection φ. Calculer $\varphi'(0)$.