UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
CONTRÔLE CONTINU
MERCREDI 13 NOVEMBRE 2019, 16 H

Durée du contrôle : 1 heure 30. Ce contrôle se compose de 3 exercices indépendants. Barème approximatif : 5–7–8.

1. a) Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,1)$ et continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^2}, \text{ pour } z \neq 0, \quad g(0) = \frac{1}{2} f''(0),$$

est holomorphe sur $D(0,1)$ et continue sur $\overline{D}(0,1)$. On citera soigneusement les théorèmes utilisés.

b) Si f vérifie les hypothèses de la question (a) et de plus $|f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in \overline{D}(0,1)$, montrer que $|f(z)| \leq |z|^2$ pour tout $z \in \overline{D}(0,1)$.

2. Soit f une fonction différentiable (au sens réel) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Sa différentielle s'écrit $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

On rappelle que pour tout $a \in \Omega$,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(a) \right)}.$$

a) Montrer que pour toute f de classe $\mathcal{C}^2$ (au sens réel), $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.

b) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω. Pour $\varepsilon > 0$, calculer $\Delta \left(\log(\varepsilon^2 + |f|^2) \right)$.

3. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1) \setminus \{0\}$ et continue sur $D(0,1)$.

a) Soit T un triangle tel que $T \cup \hat{T} \subset D(0,1) \setminus \{0\}$. En vertu de quel théorème a-t-on $\int_T f(z) dz = 0$?

b) Soit T un triangle $(0, A, B)$ tel que $T \cup \hat{T} \subset D(0,1)$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et Q_ε le quadrilatère $(\varepsilon A, A, B, \varepsilon B)$. Montrer que $\int_{Q_\varepsilon} f(z) dz = 0$.

En déduire que $\int_T f(z) dz = 0$.

c) Soit T un triangle tel que $T \cup \hat{T} \subset D(0,1)$ et que 0 appartienne à un de ses côtés. Montrer que $\int_T f(z) dz = \int_{T_1} f(z) dz + \int_{T_2} f(z) dz$ où T_1 et T_2 sont des triangles qui ont 0 comme un de leurs sommets. En déduire que $\int_T f(z) dz = 0$.

d) Soit T un triangle tel que $T \cup \hat{T} \subset D(0,1)$ et $0 \in \hat{T}$. Montrer que $\int_T f(z) dz = 0$.

e) Montrer que f est holomorphe sur $D(0,1)$ (sans utiliser le théorème de la singularité éliminable de Riemann).