UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2018-19
CONTRÔLE CONTINU
MERCREDI 21 NOVEMBRE 2018

Durée du contrôle : 1 heure 30.

Ce contrôle se compose de 4 exercices indépendants. La question marquée d'une astérisque * est facultative, ne la faites que si vous avez fait une bonne partie du reste.

1. Vérifier que les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée au point 0. Donner la nature de cette singularité (pôle, éliminable, essentielle). Quand ce sont des pôles, donner leur ordre.

(1) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
(2) $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
(3) $f(z) = \frac{1}{1+z-e^z}$.

2. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, et qu'on assimile ainsi z au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle aussi que pour $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et h une fonction harmonique sur Ω, ce qui veut dire que $h \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et pour tout $z \in \Omega$,

$$\Delta h(z) := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z) = 0.$$

a) Montrer que $\frac{\partial h}{\partial z}$ est analytique sur Ω.

b) On suppose que h est à valeurs **réelles** et qu'il existe $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $h(z) = 0$ pour tout $z \in D(a, r)$. Montrer que $h(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.

3. On pose $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, et pour $z \in \Omega$, $f(z) := \frac{z^2+3z}{(z+1)^2(z-1)}$.

a) Calculer $\operatorname{Res}(f; 1)$.

b) f admet-elle une primitive sur $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$?

c) f admet-elle une primitive sur $\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$?

d) Calculer $\operatorname{Res}(f; -1)$.

e) f admet-elle une primitive sur $\Omega_3 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\} \setminus \{-1\}$?

f) Calculer la décomposition en éléments simples de f.

*g) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ qui puisse être étendue à $\Omega_4 := \mathbb{C} \setminus (\{\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z < 0\} \cup \{-1\})$.