UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
CONTRÔLE CONTINU
LUNDI 27 NOVEMBRE 2017

Durée du contrôle : 1 heure.

Ce contrôle comporte trois exercices indépendants, avec dans certaines questions plusieurs exemples concrets à étudier. Si vous manquez de temps, laissez de côté les derniers exemples.

1. On rappelle que les développements en série des fonctions usuelles sont valides aussi bien pour la variable complexe.

Les fonctions suivantes présentent une singularité au point 0. Donner dans chaque cas, avec une justification rapide, la nature de cette singularité, et le résidu de la fonction en 0.

a)
$$f(z) := \frac{\cos z - 1}{z^2}.$$

b)
$$f(z) := \frac{\cos z - 1}{z^3}.$$

c)
$$f(z) := \frac{\cos z - 1}{z^4}.$$

d)
$$f(z) := z^3 \left(\cos(\frac{1}{z}) - 1 \right).$$

2. a) Rappeler l'énoncé du Théorème de Morera.

b) On suppose que $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe et que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{A}(\Omega)$. On suppose de plus que pour tout compact $K \subset \Omega$, la suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur K vers une fonction f (indépendante de K).

Montrer que pour toute courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

c) Montrer que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

3. a) Si $F \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $f(z) = F'(z)$, et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ est une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, exprimez $\int_\gamma f(z)dz$ à l'aide de F, $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

b) Pour les exemples suivants d'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et d'une fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, trouvez une primitive de f ou démontrez que f n'admet pas de primitive.

(1) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = z^n$, discutez selon les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$.

(2)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\varepsilon, -\varepsilon\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - \varepsilon^2},$$
discutez selon les valeurs de $\varepsilon \in [0, +\infty[$.

(3)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad f(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2(z-1)}.$$

(4)
$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup [1, +\infty[), \quad f(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2(z-1)}.$$

Indication : calculez les résidus de f en chacun de ses pôles. Des courbes fermées bien choisies pourront être utiles.