UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2019-20
CONTRÔLE TERMINAL
VENDREDI 25 OCTOBRE 2019

Durée du contrôle : **2 heures.**

Cette épreuve se compose de 3 exercices indépendants (sur deux pages). Le 4e exercice est hors-barème, plus précisément : vous ne recevrez de points pour cet exercice que si vous avez sérieusement abordé au moins 2 des trois premiers exercices.

Justifiez vos réponses par une démonstration ou un résultat du cours.

Barème **approximatif** : 4 - 6 - 10 - [hors barème] 5 (respectivement).

1. a) Rappeler le Théorème de Liouville.

b) Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$.
On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \geq 1$.
Montrer que $1/f$ est analytique sur $\mathbb{C}$.
Montrer que f est constante sur $\mathbb{C}$.

2. On assimile toujours $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

On rappelle que pour $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ un ouvert, pour une fonction $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues, on pose

$$\Delta h := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

a) Soit h une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(0,1)$. On suppose que $\Delta h(z) = 0$ pour tout $z \in D(0,1)$.

Montrer que la fonction $g : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(x+iy) := \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur tout $D(0,1)$.

b) On rappelle le théorème de Poincaré : si un couple de fonctions (f_1, f_2) définies sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ vérifie $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$, alors il existe une fonction F sur l'ouvert tel que $f_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Montrer qu'il existe F une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,1)$ telle que $F'(z) = g(z)$, pour tout $z \in D(0,1)$.

c) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{Re} F + c = h$. Indication : une fonction dont le gradient est identiquement nul sur $D(0,1)$ doit être constante.

3. a) Calculer les nombres z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_j^2 = -i = e^{-i\pi/2}$, $j = 1, 2$. En déduire la factorisation du polynôme $z^2 + i$.

b) Soit $f(z) := \frac{1}{z^2+i}$. Calculer les résidus de f en z_1 et z_2.

c) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+i} dx$ est absolument convergente.

d) On considère le chemin fermé γ qui dépend du paramètre R, avec $1 < R$, composé de la concaténation, dans cet ordre, des chemins suivants :

(1) $\gamma_1(t) := t$, $-R \leq t \leq R$;
(2) $\gamma_2(t) := Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ par la méthode des résidus.

e) Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta = 0$.

f) Déduire de ce qui précède la valeur (complexe) de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+i} dx$.

g) Calculer Re $\left(\frac{1}{x^2+i}\right)$ et Im $\left(\frac{1}{x^2+i}\right)$. Indication : pour $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a\bar{b}}{|b|^2}$.

h) En déduire les valeurs (réelles) de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

4. **(Hors barème)**

On propose une autre méthode pour calculer une des intégrales de l'exercice 3 (h).

Soit $g(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Déterminer les pôles de g. Calculer $\int_\gamma g(z)dz$ par la méthode des résidus, où γ est le chemin défini dans l'exercice 3 (d). Faire tendre R vers l'infini et conclure.