UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2017-18
CONTRÔLE TERMINAL
LUNDI 6 NOVEMBRE 2017

Durée du contrôle : 2 heures.

Cette épreuve se compose de 4 exercices indépendants et de difficulté à peu près croissante, mais le début de chaque exercice est à la portée de tous. Justifiez vos réponses par une démonstration ou un résultat du cours.

Barème approximatif : 4-3-3-10 (respectivement).

1. On rappelle qu'une fonction analytique f sur $D(0,1)$ s'écrit $f(z) = \sum_k a_k z^k$, où la série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En particulier, f est continue et $f(0) = a_0$.

a) Rappeler l'énoncé de la forme locale du théorème des zéros isolés.

b) Y a-t-il des fonctions analytiques sur $D(0,1)$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$? Si oui, lesquelles ou laquelle ?

c) Même question pour la condition $f(\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}$.

d) Même question pour la condition $f(\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n}$.

2. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$. On suppose que f est analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ (l'adhérence de Ω). On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω, donc $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

On suppose que $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial\Omega$. Montrer que soit f est constante, de module 1, soit il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$. Indication : si f ne s'annule pas, considérer $1/f$.

3. On rappelle qu'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est *dense* dans $\mathbb{C}$ si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\inf\{|z-a| : a \in A\} = 0$, ou de façon équivalente, il existe une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_n a_n = z$.

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{C}$, on note $f(\mathbb{C}) := \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in \mathbb{C}, w = f(z)\}$ (l'image de $\mathbb{C}$ par la fonction f).

a) Si f est un polynôme, que vaut $f(\mathbb{C})$? Même question si $f(z) = e^z$.

b) Soit A un ensemble qui n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $D(z_0, r) \cap A = \emptyset$.

c) Soit f analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$. Indication : si ce n'était pas le cas, considérer z_0 et r comme dans la question b) et la fonction $g(z) := \frac{1}{f(z)-z_0}$.

(../..)

(../..)

4. a) Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Une façon rapide est de remarquer que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$.

b) On pose $f_0(z) := \frac{1}{z^2+z+1}$. Calculer $\mathrm{Res}(f_0, e^{2\pi i/3})$.

c) Pour $R > 1$, on considère le chemin (courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) Γ obtenu par la concaténation du segment $\gamma_1 := [-R, R]$, parcouru dans le sens croissant, et du demi cercle $\gamma_2 := \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$, parcouru dans le sens trigonométrique.

Calculer $\int_\Gamma f_0(z)dz$.

d) Montrer que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f_0(z)dz = 0$ et en déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

e) On pose $g(z) := \frac{1}{(z^2+z+1)^2}$. Calculer $\mathrm{Res}(g, e^{2\pi i/3})$.

f) En utilisant le même chemin Γ, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ par la méthode des résidus.

g) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose $f_\xi(z) := e^{-2\pi i z\xi} f_0(z)$.

Pour $\xi < 0$, montrer que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f_\xi(z)dz = 0$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx$ par la méthode des résidus en utilisant toujours le chemin Γ.

h) Pour $\xi > 0$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx$ par la méthode des résidus en utilisant le chemin Γ_1 obtenu par la concaténation du segment $\gamma_3 := [-R, R]$, parcouru dans le sens décroissant, et du demi cercle $\gamma_4 := \{Re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\}$, parcouru dans le sens trigonométrique.

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction g absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\hat{g}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} g(x)dx.$$

Si on pose $f(x) = f_0(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{-\pi|\xi|\sqrt{3}}.$$

i) Retrouver le résultat de la question f) par le théorème de Plancherel.