UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2019-20
CONTRÔLE CONTINU
LUNDI 30 SEPTEMBRE 2019

Durée du contrôle : 1 heure 30.
Ce contrôle se compose de 3 exercices indépendants.

1. Soit $f(z) := (z-1)(\bar{z}+1)$. En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction f est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

2. On considère la fonction $f(z) := \frac{1}{1-z^2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$.

a) Montrer que f peut être représentée par une série entière autour de 0. La calculer, et donner son rayon de convergence.

b) Montrer que $g(z) := \frac{2z}{(1-z^2)^2}$ peut être représentée par une série entière autour de 0. La calculer, et donner son rayon de convergence.

c) Décomposer f en éléments simples. Indication : $f(z) = \frac{\alpha}{1-z} + \frac{\beta}{1+z}$, pour des nombres complexes α, β à déterminer.

d) Montrer que f peut être représentée par une série entière autour de 3. La calculer, et donner son rayon de convergence. Suggestion : poser $z_1 := z - 3$.

3. Soit Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, et f et g deux fonctions analytiques sur Ω. On suppose que g n'est pas identiquement nulle sur Ω, et que pour tout $z \in \Omega$, on a $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$.

On rappelle qu'une fonction analytique à valeurs réelles définie sur un disque est nécessairement constante.

a) Soit z_0 tel que $g(z_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un disque $D(z_0, r_0)$ tel que la fonction $f(z)/g(z)$ soit analytique sur $D(z_0, r_0)$.

b) Montrer que $f(z)/g(z)$ est constante sur $D(z_0, r_0)$. Soit c cette constante.

c) Montrer que $f(z)/g(z)$ est constante sur $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$. Indication : considérer la fonction $f(z) - cg(z)$.