UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
CONTRÔLE CONTINU
VENDREDI 12 OCTOBRE 2018

Durée du contrôle : 1 heure 30.

Ce contrôle se compose de 4 exercices indépendants, sur deux pages. Les questions marquées d'une astérisque * sont facultatives, ne les faites que si vous avez fait le reste.

1. Soit f une fonction analytique dans un disque $D(0,r)$, $r > 0$. On dira que f est *paire* si pour tout $z \in D(0,r)$, $f(z) = f(-z)$.

On suppose que pour tout $n > 1/r$, n entier,

$$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}).$$

Montrer que f est paire.

Indication : on pourra considérer la fonction $g(z) := f(z) - f(-z)$.

2. On rappelle qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable g vérifie les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Im} g) &= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} g), \\ \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} g) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im} g), \end{aligned}$$

ou de façon équivalente $\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial x}$.

a) Pour une fonction $\mathbb{R}$-différentiable f quelconque à valeurs complexes, montrer rapidement que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

b) On suppose que f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point d'un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$, et que $|f|$ est constante. On rappelle que $|f|^2 = f\bar{f}$.

Montrer en utilisant les équations de Cauchy-Riemann que

$$\bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} + f\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0 \text{ et } \bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} - f\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0.$$

c) Montrer que f est constante sur U.

3. a) Factoriser le polynôme $f(z) := z^2 + 2z + 2$ dans le plan complexe. Indication : $z^2 + 2z + 2 = z^2 + 2z + 1 + 1$. Montrer que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{D}(0,1)$.

b) On pose $\gamma(t) := e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calculer $\int_\gamma \frac{1}{f(z)}dz$. Indication : sans calculs ! Mais justifiez votre réponse.

c) On pose $\gamma_{1,R}(t) := t$, $-R \leq t \leq R$, et $\gamma_{2,R}(t) := Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, et γ_R la courbe fermée obtenue en raccordant le segment de droite $\gamma_{1,R}$ et le demi-cercle $\gamma_{2,R}$.

Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{f(z)}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx, \text{ et } \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{f(z)}dz = 0.$$

d) Calculer $\int_{\gamma_R} \frac{1}{f(z)}dz$ et en déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

4. a) Soit f une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, qui ne s'annule jamais, et telle que $z \mapsto (f(z))^2$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable.

*b) Application : on rappelle que les dérivées successives de $(1+x)^{1/2}$ sont données par

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (1+x)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k}.$$

Montrer (sans calculs !) que si on définit $w \mapsto w^{1/2}$ sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ en choisissant l'argument de w dans l'intervalle $]-\pi,+\pi[$, alors pour tout $z \in D(0,1)$,

$$(1+z)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)z^k.$$