UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
SOLUTION DU CONTRÔLE CONTINU
VENDREDI 12 OCTOBRE 2018

Durée du contrôle : 1 heure 30.

Ce contrôle se compose de 4 exercices indépendants, sur deux pages. Les questions marquées d'une astérisque * sont facultatives, ne les faites que si vous avez fait le reste.

1. *Soit f une fonction analytique dans un disque $D(0,r)$, $r > 0$. On dira que f est* paire *si pour tout $z \in D(0,r)$, $f(z) = f(-z)$.*

On suppose que pour tout $n > 1/r$, n entier,

$$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}).$$

Montrer que f est paire.

Indication : on pourra considérer la fonction $g(z) := f(z) - f(-z)$.

Comme $-z \in D(0,r)$ quand $z \in D(0,r)$, la fonction g est définie sur $D(0,r)$. De plus, elle s'annule en tout point de la forme $\frac{1}{n}$, $n > 1/r$, et donc aussi en 0 par continuité. Elle admet donc un zéro non isolé. Comme $D(0,r)$ est connexe, g doit être identiquement nulle, donc pour tout $z \in D(0,r)$, $f(z) - f(-z) = 0$, cqfd.

2. *On rappelle qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable g vérifie les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(Im\, g) &= \frac{\partial}{\partial x}(Re\, g), \\ \frac{\partial}{\partial y}(Re\, g) &= -\frac{\partial}{\partial x}(Im\, g), \end{aligned}$$

ou de façon équivalente $\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial x}$.

a) Pour une fonction $\mathbb{R}$-différentiable f quelconque à valeurs complexes, montrer rapidement que

$$\frac{\partial \bar f}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \frac{\partial \bar f}{\partial y} = \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

$$\frac{\partial \bar f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f) = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} - i\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = \overline{\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} + i\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\right)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

On montre la propriété pour $\frac{\partial \bar f}{\partial y}$ par un calcul analogue en remplaçant x par y.

b) On suppose que f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point d'un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$, et que $|f|$ est constante. On rappelle que $|f|^2 = f\bar{f}$.

Montrer en utilisant les équations de Cauchy-Riemann que

$$\bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} + f\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0 \text{ et } \bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} - f\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0.$$

En dérivant l'équation $f\bar{f} = C$, on trouve

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{f} + f\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} + f\overline{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

d'après la question précédente. De la même manière, en dérivant par rapport à y, on trouve

$$\bar{f}\frac{\partial f}{\partial y} + f\overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0,$$

donc en appliquant l'équation de Cauchy-Riemann et le fait que $\overline{iz} = -i\bar{z}$,

$$\bar{f}i\frac{\partial f}{\partial x} - fi\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0,$$

ce qui donne, en simplifiant par i, la deuxième égalité recherchée.

c) Montrer que f est constante sur U.

En additionnant les deux égalités obtenues dans la question b), nous obtenons $2\bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Si $|f| = 0$ en tout point de U, alors $f = 0$ et la démonstration est finie. Si $|f| = C \neq 0$, alors $\bar{f}$ ne s'annule jamais, et on déduit de $\bar{f}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ le fait que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en tout point.

Des équations de Cauchy-Riemann, on déduit que $\frac{\partial f}{\partial y} = i0 = 0$, donc les deux dérivées partielles de f sont identiquement nulles. Comme U est connexe, f est constante.

3. *a) Factoriser le polynôme $f(z) := z^2 + 2z + 2$ dans le plan complexe. Indication : $z^2 + 2z + 2 = z^2 + 2z + 1 + 1$. Montrer que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{D}(0, 1)$.*
Factorisation : $z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 - i^2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$.

Les pôles de f sont $-1+i$ et $-1-i$, dont le module est $\sqrt{2} > 1$, donc f ne s'annule pas sur le disque unité fermé.

b) On pose $\gamma(t) := e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calculer $\int_\gamma \frac{1}{f(z)}dz$. Indication : sans calculs ! Mais justifiez votre réponse.

La fonction $1/f$ est holomorphe sur tout le disque ouvert $D(0, 5/4)$ (par exemple, car $5/4 < \sqrt{2}$), la courbe γ est une courbe de Jordan, donc d'après le Théorème de Cauchy, $\int_\gamma \frac{1}{f(z)}dz = 0$.

c) On pose $\gamma_{1,R}(t) := t$, $-R \leq t \leq R$, et $\gamma_{2,R}(t) := Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, et γ_R la courbe fermée obtenue en raccordant le segment de droite $\gamma_{1,R}$ et le demi-cercle $\gamma_{2,R}$.

Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{f(z)}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx, \text{ et } \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{f(z)}dz = 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est à valeurs positives pour $x \in \mathbb{R}$, elle est dominée par $2/x^2$ quand $|x|$ est suffisamment grand, donc son intégrale généralisée converge au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, d'où la première limite.

Pour estimer la deuxième intégrale, on observe d'abord que la longueur de $\gamma_{2,R}$ est de πR. D'autre part, quand $|z| = R$ (et donc en particulier quand $z = \gamma_{2,R}(t)$),

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 2|z| - 2} = \frac{1}{R^2 - 2R - 2} = \frac{1}{R^2(1 - 2/R - 2/R^2)} \leq \frac{2}{R^2}$$

pour $R > 8$ (par exemple). Donc pour $R > 8$,

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{f(z)} dz\right| \leq \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{2\pi}{R} \to 0 \text{ quand } R \to +\infty.$$

d) Calculer $\int_{\gamma_R} \frac{1}{f(z)} dz$ *et en déduire* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$.

Le seul des deux pôles de $1/f$ entouré par la courbe γ_R est $-1+i$. C'est un pôle simple, et au voisinage de celui-ci

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\frac{1}{z+1+i}}{z+1-i},$$

donc le résidu de $1/f$ est $\frac{1}{-1+i+1+i} = \frac{1}{2i}$.

Comme la courbe γ_R est parcourue dans le sens direct (trigonométrique), la formule des Résidus nous donne

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{f(z)} dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

En écrivant

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{f(z)} dz = \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{f(z)} dz + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{f(z)} dz,$$

en passant à la limite et en utilisant les résultats précédents, on trouve $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \pi$.

(NB : on pouvait vérifier ce résultat en faisant le changement de variable $x' = x+1$, on retrouve une primitive classique).

4. *a) Soit f une fonction continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, qui ne s'annule jamais, et telle que $z \mapsto (f(z))^2$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable.*

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable.

L'application $w \mapsto w^2 =: g(w)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable sur tout $\mathbb{C}$, et sa dérivée complexe est $2w$. Donc sa différentielle (au sens réel) est l'application linéaire donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} w & -2\operatorname{Im} w \\ 2\operatorname{Im} w & 2\operatorname{Re} w \end{pmatrix},$$

qui est inversible quand $w \neq 0$. Le Théorème d'Inversion Locale nous donne donc en particulier que dans un voisinage d'un point w_0^2 avec $w_0 \neq 0$, il y a une unique application inverse F de g vérifiant $F(w^2) = w$ et que les valeurs de F restent dans un voisinage de w_0. Comme notre fonction f est continue, $f(z)$ reste dans un voisinage de

$f(z_0)$ quand z est dans un voisinage de z_0, si on prend $w_0 = f(z_0) \neq 0$ par hypothèse, $F((f(z)^2) = f(z)$ au voisinage de z_0 par unicité.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ comme composition de fonctions $\mathcal{C}^1$.

On pourrait calculer la différentielle de f en multipliant par l'inverse de la matrice ci-dessus et vérifier les équations de Cauchy-Riemann, mais on peut voir directement que

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(z+h)^2 - f(z)^2}{h(f(z+h)+f(z))} \to \frac{(f^2)'(z)}{2hf(z))},$$

puisque $f(z) \neq 0$. Donc f est dérivable au sens complexe en tout point.

**b) Application : on rappelle que les dérivées successives de $(1+x)^{1/2}$ sont données par*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (1+x)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k}.$$

Montrer (sans calculs !) que si on définit $w \mapsto w^{1/2}$ sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ en choisissant l'argument de w dans l'intervalle $]-\pi,+\pi[$, alors pour tout $z \in D(0,1)$,

$$(1+z)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right) z^k.$$

Ici nous cherchons une fonction f telle que $f(z)^2 = 1+z$. Sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ elle ne s'annulera pas, puisque $z+1 \neq 0$. Une telle fonction est donnée par $z \mapsto |1+z|^{1/2} \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(1+z))$, où l'argument est pris dans l'intervalle $]-\pi,+\pi[$. Appelons-la f. D'après la question précédente, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$.

D'après un corollaire de la Formule de Cauchy, f sera développable en série entière sur le plus grand disque contenu dans $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ centré en 0, qui est $D(0,1)$, et les coefficients de la série sont donnés par les coefficients de Taylor. Or la fonction $f(x)$ est positive pour $x \in]-1,+\infty[$, donc coïncide avec $\sqrt{1+x}$ (l'habituelle racine carrée positive), donc on obtient les coefficients de Taylor par la formule ci-dessus.