UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2017-18
CONTRÔLE CONTINU 1
LUNDI 2 OCTOBRE 2017

Durée du contrôle : 1 heure.

1. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique dans un disque $D(0,r)$, $r>0$, telle que pour tout $n>1/r$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=e^{-n}. \tag{1}$$

a) Montrer que $f(0)=0$.
b) Montrer que pour tout $r'\in]0,r[$, il existe $z\in D(0,r')$ tel que $f(z)\neq 0$.
c) Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$. Montrer qu'il existe $k\geq 1$ tel que $a_k\neq 0$.
d) On pose $k_0:=\min\{k:a_k\neq 0\}$. Calculer $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{a_{k_0}z^{k_0}}$.
e) Aboutir à une contradiction et conclure.

2. On rappelle qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable g vérifie les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Im} g) &= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} g),\\ \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} g) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im} g).\end{aligned}$$

a) On suppose que g est $\mathbb{C}$-dérivable sur un ouvert connexe Ω, et que $\operatorname{Re} g(z)=0$ pour tout $z\in\Omega$. Montrer en utilisant les équations de Cauchy-Riemann que g est constante sur Ω.

b) On considère une fonction f telle que $|f(z)|^2=1$ pour tout z.
On pose $g(z):=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, quand $f(z)\neq -1$. Montrer que $\operatorname{Re} g(z)=0$.

Indication : On rappelle que $2\operatorname{Re} g(z)=g(z)+\overline{g(z)}$, et que l'hypothèse implique que $\overline{f(z)}=1/f(z)$.

c) On considère une fonction f $\mathbb{C}$-dérivable sur un ouvert connexe Ω, telle que $|f(z)|^2=1$ pour tout z et $f(z)\neq -1$ pour tout z. Montrer que f est constante.

3. On considère une fonction f analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z)=0$. On rappelle que ceci signifie :

$$\forall\varepsilon>0,\exists R>0:|z|\geq R\Rightarrow |f(z)|<\varepsilon.$$

Montrer, soit en utilisant la formule de la moyenne en chaque $a\in\mathbb{C}$, soit en utilisant les inégalités de Cauchy en 0, que $f(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.