UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
CONTRÔLE TERMINAL, 2E SESSION
VENDREDI 14 JUIN 2019, 9 H

Durée du contrôle : 2 heures. Les 4 exercices sont indépendants.

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un disque $D(a,R) \subset \mathbb{C}$, qui est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $D(a,R)$.

On suppose que f est à valeurs réelles en tout point. Montrer que f est constante.

Indication : on pourra montrer que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in D(a,R)$, par exemple à l'aide des équations de Cauchy-Riemann ou de la définition de la dérivée au sens complexe.

2. a) Soit $r > 0$ et f une fonction analytique sur un disque $D(0,r)$ telle que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > \frac{1}{r}$. Montrer que $f(z) = z$ pour tout $z \in D(0,r)$.

Indication : considérer la fonction $g(z) := f(z) - z$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction f analytique sur un disque $D(0,r)$ avec $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{r}$, alors $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ et $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

3. a) On considère une fonction f analytique sur un ouvert qui contient le disque fermé $\overline{D}(a,r)$.

Soit $z \in D(a,r)$. Rappeler la formule de Cauchy qui donne la valeur de $f(z)$ en fonction des valeurs de f sur le cercle $\partial D(a,r)$.

b) Déduire de la formule de Cauchy l'inégalité de Cauchy :

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{r} \sup_{z:|z-a|=r} |f(z)| .$$

c) On considère une fonction f analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(z)| \leq C$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer en utilisant la question b) que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire le Théorème de Liouville.

4. a) Montrer que si g est une fonction analytique au voisinage d'un point a et que $g(a) = 0$, alors $\lim_{z\to a} \frac{g(z)}{z-a} = g'(a)$.

b) Montrer que la fonction

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{1+z^4}$$

est analytique sur $\mathbb{C}$ sauf en quatre pôles, qu'on déterminera.

c) Pour $R > 1$, soit Γ_R la courbe fermée composée des deux arcs suivants :

- $\gamma_{1,R}(t) = t$, $-R \leq t \leq R$ (le segment $[-R, R]$, orienté dans le sens de t croissant);
- $\gamma_{2,R}(t) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (le demi-cercle supérieur de rayon R centré en 0), orienté dans le sens de θ croissant.

Calculer les résidus de f en ses pôles entourés par Γ_R.

d) Montrer que pour tout z tel que $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^4-1}$. En déduire que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz = 0$.

e) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \int_{\Gamma_R} f(z)dz.$$

f) Calculer $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ par la méthode des résidus.

Attention : le résultat n'a pas besoin d'être joli, mais il a besoin d'être réel.