UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L3 PARCOURS SPÉCIAL, 2016-17 INTENSIVE COURSE IN COMPLEX ANALYSIS FINAL EXAM

PASCAL J. THOMAS

Monday, February 20, 2017, 10 am–12 noon.
Many questions are independent. Do what you can!
La version française est en pages 3 et 4.

1. Problem 1

1.1. Let S stand for the Riemann sphere. Let $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Find a Möbius map ψ such that ψ is a holomorphic bijection from $S \setminus \overline{D}(a,r)$ to the unit disc $\mathbb{D} = D(0,1)$ such that $\psi(\infty) = 0$.

1.2. Let Ω be a domain (connected open set) in $\mathbb{C}$. Let $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ such that for any $z \in \Omega$, for any $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$.

Using a theorem from our course, prove that $(\psi \circ f_n)_n$ admits a subsequence $(\psi \circ f_{n_k})_k$ which converges uniformly on every compact subset of Ω to $g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

1.3. Show that $\psi \circ f_{n_k}(z) \neq 0$, for any $z \in \Omega$, for any $k \in \mathbb{N}$.

Using a theorem from our course, prove that either $g \equiv 0$ or $g(z) \neq 0$, for any $z \in \Omega$.

1.4. In the first case from question 1.3, prove that $f_{n_k} \to \infty$, uniformly on every compact subset of Ω, that is to say, for every $K \subset \Omega$, K compact, for every $A > 0$, there exists k_0 such that for any $k \geq k_0$, $z \in K$, $|f_{n_k}(z)| \geq A$.

1.5. In the second case from question 1.3, prove that $f_{n_k} \to \psi^{-1} \circ g$, uniformly on every compact subset of Ω.

2. Problem 2

Let Ω be a simply connected domain in $\mathbb{C}$. We recall a result from our course (you don't have to prove it again): any $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ such that $f(z) \neq 0$ for all $z \in \Omega$ admits a holomorphic logarithm on Ω.

2.1. Suppose that f admits a holomorphic square root in Ω, i.e. that there exists $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ such that $f(z) = g(z)^2$, for all $z \in \Omega$. Let γ be a closed path that is the boundary of a P-domain Δ included in Ω, so that we can apply the Residue Theorem to γ. We assume that $f(z) \neq 0$ for any $z \in \partial\Delta = \operatorname{supp}\gamma$ (the image of the path γ).

Prove that

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in 2\mathbb{Z}.$$

2.2. Suppose that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ and $f(z) \neq 0$ for all $z \in \Omega$. Prove that there exists $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ such that $f(z) = g(z)^2$, for all $z \in \Omega$.

2.3. Suppose that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ and there exists a unique $z_0 \in \Omega$ such that $f(z_0) = 0$. Let m be the order of vanishing of f at z_0, i.e.

$$m := \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* : f^{(k)}(z_0) \neq 0 \right\}.$$

Prove that f admits a holomorphic square root in Ω if and only if m is an even number (i.e. $m \in 2\mathbb{Z}$).

Hint: you will need the result of question 2.1 in one direction; in the other direction, consider first $f_1(z) := (z - z_0)^{-m} f(z)$.

2.4. Suppose now that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ and $f^{-1}\{0\}$ is a finite set $\{z_1, \ldots, z_N\} \subset \Omega$. Show that for each j, there exists $r_j > 0$ such that

$$\overline{D}(z_j, r_j) \subset \Omega \setminus \{z_k : 1 \leq k \leq N, k \neq j\}.$$

Let m_j be the order of vanishing of f at z_j. Compute $\int_{\partial D(z_j, r_j)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$.

State and prove a necessary and sufficient condition for f to admit a holomorphic square root in Ω.

2.5. Suppose now that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$. We accept the following fact: there exists an exhaustion of Ω by compact sets such that their boundaries meet no zero of f, and their interiors are connected, simply connected; i.e. there exists $(K_n)_n$ a sequence of compacts sets $K_n \subset \Omega$ such that $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ for all n, $\bigcup_n K_n = \Omega$, for any n, for any $z \in \partial K_n$, $f(z) \neq 0$, and for any n, K_n° is a nonempty, simply connected domain. Let $p_0 \in K_0$.

Prove that for any n, $f^{-1}\{0\} \cap K_n$ is a finite set.

State and prove a necessary and sufficient condition for f to admit a holomorphic square root in K_n°, call it g_n. Once g_0 has been chosen, prove that we can choose g_n such that $g_n(p_0) = g_0(p_0)$.

2.6. If the condition from question 2.5 is verified for all n, prove that we can define a function $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ such that $f(z) = g(z)^2$, for all $z \in \Omega$ and $g(p_0) = g_0(p_0)$.

Hint: for any n, what can $g|_{K_n}$ be?

Deduce that f admits a holomorphic square root in Ω if and only if the condition from question 2.1 is satisfied.

3. Problème 1

3.1. Soit S la sphère de Riemann. Soient $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Déterminer une homographie ψ telle que ψ soit une bijection holomorphe de $S \setminus \overline{D}(a,r)$ dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$ telle que $\psi(\infty) = 0$.

3.2. Soit Ω un domaine (ouvert connexe) dans $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(\Omega)$ qui vérifie que pour tout $z \in \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$.

En utilisant un théorème du cours, démontrer que $(\psi \circ f_n)_n$ admet une sous-suite $(\psi \circ f_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers $g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

3.3. Montrer que $\psi \circ f_{n_k}(z) \neq 0$, pour tout $z \in \Omega$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En utilisant un théorème du cours, démontrer que soit $g \equiv 0$, soit $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

3.4. Dans le premier cas de la question 3.3, montrer que $f_{n_k} \to \infty$, uniformément sur tout compact de Ω, c'est-à-dire que pour tout $K \subset \Omega$, K compact, pour tout $A > 0$, il existe k_0 tel que pour tous $k \geq k_0$, $z \in K$, $|f_{n_k}(z)| \geq A$.

3.5. Dans le segond cas de la question 3.3, montrer que $f_{n_k} \to \psi^{-1} \circ g$, uniformément sur tout compact de Ω.

4. Problème 2

Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. On rappelle un résultat du cours (vous n'avez pas besoin de le redémontrer): toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$ admet un logarithme holomorphe dans Ω.

4.1. On suppose que f admet une racine carrée holomorphe dans Ω, c'est-à-dire qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) = g(z)^2$, pour tout $z \in \Omega$. Soit γ un chemin fermé qui est la frontière d'un P-domaine Δ inclus dans Ω, de telle façon que nous pouvons appliquer le Théorème des Résidus à γ. On suppose que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial\Delta = \operatorname{supp}\gamma$ (l'image du chemin γ).

Démontrer que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in 2\mathbb{Z}.$$

4.2. On suppose que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) = g(z)^2$, pour tout $z \in \Omega$.

4.3. On suppose que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et qu'il existe un unique $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Soit m l'ordre d'annulation de f en z_0, c'est-à-dire
$$m := \min\left\{k \in \mathbb{N}^* : f^{(k)}(z_0) \neq 0\right\}.$$
Montrer que f admet une racine carrée holomorphe dans Ω si et seulement si m est pair (c'est-à-dire $m \in 2\mathbb{Z}$).

Indication : vous aurez besoin du résultat de la question 4.1 dans un sens; dans l'autre sens, considérez d'abord $f_1(z) := (z - z_0)^{-m} f(z)$.

4.4. On suppose maintenant que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f^{-1}\{0\}$ est un ensemble fini $\{z_1, \dots, z_N\} \subset \Omega$. Montrer que pour tout j, il existe $r_j > 0$ tel que
$$\overline{D}(z_j, r_j) \subset \Omega \setminus \{z_k : 1 \leq k \leq N, k \neq j\}.$$

Soit m_j l'ordre d'annulation de f en z_j. Calculer $\int_{\partial D(z_j,r_j)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$.

Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une racine carrée holomorphe dans Ω.

4.5. On suppose maintenant que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Nous admettrons le fait suivant: il existe une exhaustion de Ω par des compact tels que leurs frontières ne contiennent aucun zéro de f, et leurs intérieurs sont connexes et simplement connexes; c'est-à-dire il existe $(K_n)_n$ une suite de compacts $K_n \subset \Omega$ tels que pour tout n $K_n \subset K_{n+1}^\circ$, $\bigcup_n K_n = \Omega$, pour tout n et pour tout $z \in \partial K_n$, $f(z) \neq 0$, et pour tout n, K_n° est un domaine non vide et simplement connexe. Soit $p_0 \in K_0$.

Montrer que pour tout n, $f^{-1}\{0\} \cap K_n$ est un ensemble fini.

Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une racine carrée holomorphe dans K_n°, qu'on notera g_n. Une fois que g_0 a été choisie, montrer qu'on peut choisir g_n de telle manière que $g_n(p_0) = g_0(p_0)$.

4.6. Si la condition de la question 4.5 est satisfaite pour tout n, montrer qu'on peut définir une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) = g(z)^2$, pour tout $z \in \Omega$ and $g(p_0) = g_0(p_0)$.

Indication : pour tout n, que peut être $g|_{K_n}$?

En déduire que f admet une racine carrée holomorphe dans Ω si et seulement si la condition de la question 4.1 est satisfaite.