UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L3 PARCOURS SPÉCIAL, 2016-17 EXERCISE SHEET # 2: LOGARITHMS, SEQUENCES OF FUNCTIONS

PASCAL J. THOMAS

1

Exercises or questions marked with a * are not mandatory. Do them later.

1.1. We have proved in class that for any domain Ω and $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, either f is constant or $f(\Omega)$ is an open set. Use this fact to deduce the Maximum Modulus Principle.

1.2. The goal of this exercise is to show that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, and if there exists $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ such that $g(z)^2 = f(z)$, then g is holomorphic. So the obstruction to the existence of a square root of a holomorphic function is a purely topological fact (depending on properties of continuous functions).

Here is how to do it. The first question is not needed for the proof, it is meant to clarify the situation.

a) When $f(z) \neq 0$, it admits two distinct square roots. Since the choice can be made for each point z, there is a priori an infinity of square root functions for f. In a small enough disk where $f(z) \neq 0$, prove that there exist exactly two continuous functions h and $-h$ such that $h(z)^2 = f(z)$.

b) At a point a where $f(a) \neq 0$, show that g is complex-differentiable and compute its derivative. Deduce that $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus f^{-1}(0))$.

c) Using the fact that the zeros of f are isolated, show that g is in fact holomorphic on the whole of Ω.

1.3. Using the same ideas, show that if $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f(z) \neq 0$ for all $z \in \Omega$, f admits a holomorphic logarithm if and only if it admits a continuous logarithm.

1.4. * We have seen in class that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admits a holomorphic logarithm if and only if $f(z) \neq 0$ for all $z \in \Omega$ and for any closed path γ in Ω, $\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0$.

The goal of this exercise is to show that $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admits a holomorphic square root if and only if for any closed path γ in $\Omega \setminus f^{-1}(0)$, $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in 2\mathbb{Z}$.

a) Prove that the condition is necessary for f to admit a square root.

b) If γ is a path in Ω, and if $\arg f$ is any determination of the argument of f, defined in a neighborhood of a where $f(a) \neq 0$, show that

$$\frac{d}{dt} (\arg f(\gamma(t))) = \mathrm{Im} \left(\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \right).$$

Note that the derivative of the argument is well defined because various determinations only differ by an additive constant.

c) Let $z_0 \in \Omega$, and for each $z \in \Omega$, with $f(z) \neq 0$, let γ_z be a path from z_0 to z in $\Omega \setminus f^{-1}(0)$. Prove that the function

$$z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) =: h(z)$$

is well defined, i.e. it does not depend on the choice of γ_z, and continuous on $\Omega \setminus f^{-1}(0)$.

d) Prove that $g(z) := |f(z)|^{1/2} h(z)$ is holomorphic and verifies $g(z)^2 = f(z)$, and extends to Ω.

1.5. Let $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. This domain is not simply connected (why?).

We want to prove that $f(z) := z^2 - 1$ admits a square root on Ω.

*a) If $g(z)^2 = f(z)$ and $g(x) > 0$ for $x \in (1, \infty)$, then prove that the argument of g can be defined on the closed upper and lower half-planes (minus the origin). Then show that they agree for $x \in (-\infty, -1)$, and conclude, using exercise 1.2.

b) Here is another proof: $f(z) := z^2(1 - \frac{1}{z^2})$, so it is enough to find a square root for $f_1(z) := 1 - \frac{1}{z^2}$. Do this by using the change of variables $w = \mathcal{I}(z)$ and noting that $S \setminus [-1, +1]$, or equivalently $\mathcal{I}(S \setminus [-1, +1])$, is simply connected.

1.6. Prove that on a simply connected domain Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admits a holomorphic square root if and only if for any $a \in \Omega$, $m_f(a) \in 2\mathbb{Z}$ (the multiplicity of a possible zero of f is always even).

a) Prove that the condition is necessary.

b) Prove the converse when f only has a finite number of zeros. Hint: divide by an appropriate polynomial.

* c) Prove the general case using the previous question and constructing a sequence of $g_n \in \mathcal{O}(K_n^\circ)$, where $(K_n)_n$ is the exhaustion by compact sets given in our lectures, such that $g_n^2 = f$ on K_n.

1.7. Recall what we proved in the lectures by producing a local m-th root:

Proposition 1.1. Let $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ and $a \in \Omega$ such that $f - f(a)$ admits a zero of multiplicity m at a. Then there exists $r > 0$ such that for any $b \in D(a, r) \setminus \{a\}$, the equation $f(z) = f(b)$ admits exactly m distinct roots.

Prove this again using Rouché's Theorem, or directly with an integral formula for the number of zeros.

Hint: $f(z) - f(a) = \frac{1}{m!}(z - a)^m + o((z - a)^m)$. You can use a small enough circle around a.

2

Les exercices ou les questions signalés par une * ne sont pas obligatoires. À faire plus tard.

2.1. Nous avons démontré en cours que pour tout domaine Ω et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, soit f est constante, soit $f(\Omega)$ est ouvert. A l'aide de ce fait, déduisez le Principe du Module Maximum.

2.2. Le but de cet exercice de montrer que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, et s'il existe $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ telle que $g(z)^2 = f(z)$, alors g est holomorphe. Donc l'obstruction à l'existence d'une racine carrée d'une fonction holomorphe est purement topologique (elle dépend des propriétés des fonctions continues).

Voici comment faire. La première question n'est pas nécessaire à la démonstration, elle tente simplement de clarifier la situation.

a) Quand $f(z) \neq 0$, elle admet deux racines carrées. Ce choix pouvant être fait pour chaque point z, il y a a priori une infinité de fonctions racines carrées de f. Dans un disque suffisamment petit où $f(z) \neq 0$, montrer qu'il existe exactement deux fonctions continues h et $-h$ telles que $h(z)^2 = f(z)$.

b) En un point a où $f(a) \neq 0$, montrer que g est dérivable au sens complexe et et calculer sa derivée. En déduire que $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus f^{-1}(0))$.

c) En utilisant le fait que les zéros de f sont isolés, montrer que g est en fait holomorphe sur Ω tout entier.

2.3. Avec les mêmes idées, montrer que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, f admet un logarithme holomorphe si et seulement si elle admet un logarithme continu.

2.4. * Nous avons vu en cours que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet un logarithme holomorphe si et seulement si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$ et que pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0$.

Le but de cet exercice est de démontrer que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet une racine carrée holomorphe si et seulement si pour tout chemin fermé γ dans $\Omega \setminus f^{-1}(0)$, $\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in 2\mathbb{Z}$.

a) Montrer que la condition est nécessaire pour f admette une racine carrée.

b) Si γ est un chemin dans Ω, et si $\arg f$ est une détermination arbitraire de l'argument de f, définie dans un voisinage de a où $f(a) \neq 0$, démontrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\arg f(\gamma(t))\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\right).$$

Notez que la dérivée de l'argument est bien définie car les déterminations possibles diffèrent entre elles par une constante additive.

c) Soit $z_0 \in \Omega$, et pour tout $z \in \Omega$ avec $f(z) \neq 0$, soit γ_z un chemin de z_0 à z dans $\Omega \setminus f^{-1}(0)$. Montrer que la fonction

$$z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) =: h(z)$$

est bien définie, càd qu'elle ne dépend pas du choix de γ_z, et continue sur $\Omega \setminus f^{-1}(0)$.

d) Montrer que $g(z) := |f(z)|^{1/2} h(z)$ est holomorphe et vérifie $g(z)^2 = f(z)$, et se prolonge à Ω.

2.5. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Ce domaine n'est pas simplement connexe (pourquoi ?).

Nous voulons démontrer que $f(z) := z^2 - 1$ admet une racine carrée sur Ω.

*a) Si $g(z)^2 = f(z)$ et $g(x) > 0$ pour $x \in (1, \infty)$, montrer que l'argument de g peut être défini sur chacun des demi-plans supérieur et inférieur fermés (privés de l'origin). Puis montrer que ces déterminations coïncident pour $x \in (-\infty, -1)$, et concluez, en vous servant de l'exercice 1.2.

b) Voici une autre démonstration : $f(z) := z^2(1 - \frac{1}{z^2})$, donc il suffit de trouver une racine carrée de $f_1(z) := 1 - \frac{1}{z^2}$. Faites-le à l'aide du changement de variables $w = \mathcal{I}(z)$ en notant que $S \setminus [-1, +1]$, ou de façon équivalente $\mathcal{I}(S \setminus [-1, +1])$, est simplement connexe.

2.6. Montrer que dans un domaine simplement connexe Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet une racine carrée holomorphe si et seulement si pour tout $a \in \Omega$, $m_f(a) \in 2\mathbb{Z}$ (la multiplicité d'un zéro éventuel de f est toujours paire).

a) Montrer que la condition est nécessaire.

b) Montrer la réciproque quand f n'a qu'un nombre fini de zéros. Indication : diviser par un polynôme approprié.

* c) Montrer le cas général grâce à la question précédente et en construisant une suite de fonctions $g_n \in \mathcal{O}(K_n^\circ)$, où $(K_n)_n$ est l'exhaustion par des compacts donnée en cours, telles que $g_n^2 = f$ sur K_n.

2.7. On rappelle ce qui a été prouvé en cours en construisant une racine m-ième locale :

Proposition 2.1. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ tels que $f - f(a)$ admette un zéro de multiplicité m en a. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $b \in D(a, r) \setminus \{a\}$, l'équation $f(z) = f(b)$ admette exactement m racines distinctes.

Donner une autre démonstration de ceci en utilisant le Théorème de Rouché, ou directement avec une formule intégrale pour le nombre de zéros.

Indication : $f(z) - f(a) = \frac{1}{m!}(z - a)^m + o((z - a)^m)$. On peut utiliser un cercle suffisamment petit autour de a...