UNIVERSITÉ PAUL SABATIER :
L3 PARCOURS SPÉCIAL, 2016-17
EXERCISE SHEET # 1: CONFORMAL MAPPING

PASCAL J. THOMAS

1

Exercises or questions marked with a * are not mandatory. Do them later.

1.1. Prove that the group $\mathcal{H}(S)$ is generated by the rotations $z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$; the dilations $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$; the translations $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$; and the inversion $\mathcal{I}$.

Hint: use partial fraction decomposition (which reduces here to one Euclidean division).

You may also use Gauss's method for resolution of linear systems to find a generating system for the group $GL(2, \mathbb{C})$ (if you prefer matrix methods).

1.2. Prove that the image of a line or circle under a linear fractional map is a line or circle.

Hint: it is enough to do it for the generators of the group $\mathcal{H}(S)$ (why?).

1.3. a) Prove that given any distinct points $a_1, a_2, a_3 \in S$, there exists $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ such that $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(a_2) = 1$, $\varphi(a_3) = \infty$.

The value $\varphi(z)$ is called the cross ratio of (z, a_2, a_1, a_3).

Hints: when $a_1, a_3 \in \mathbb{C}$, we may write $\varphi(z) = c\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. It is easy to choose α such that $\varphi(a_1) = 0$, and β such that $\varphi(a_3) = \infty$. Then all that is left is the computation of c.

Discuss the various special cases when one of the a_j is ∞.

b) Work out the examples of the cross ratios of $(z, 1, \infty, 0)$ and $(z, 0, \infty, 1)$.

c) Prove that $\mathcal{H}(S)$ is transitive on triples of points, i.e. given any (a_1, a_2, a_3) and (b_1, b_2, b_3), ordered triples of distinct points of S, there exists $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ such that $\varphi(a_j) = b_j$. Show that φ is unique.

Given two circles (or lines) in S, and two points on each circle, prove that there exists a unique $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ mapping the first circle to the second, and the given points of the first circle to those on the second, respecting their order.

1.4. a) Find a conformal bijection from $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ to $\mathbb{D}$.

b) Find a conformal bijection from $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ to $\mathbb{D}$.

c) Find a conformal bijection from $\{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ to $\mathbb{D}$.

1.5. We want to find all holomorphic bijections from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$. Let f be a holomorphic bijection from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$.

a) Prove that $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Hint: f^{-1} is a continuous map.

Deduce that $f \circ \mathcal{I}$ admits a pole at 0.

b) Prove that there exists $N \in \mathbb{N}$ and $A, B > 0$ such that $|f(z)| \leq A + B|z|^N$, $z \in \mathbb{C}$. Deduce, using the Cauchy inequalities, that $f^{(N)}$ is bounded on $\mathbb{C}$, thus that f is a polynomial.

c) Prove that there exists $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$ such that $f(z) = az + b$.

*d) If we extend the definition of holomorphic maps to infinite values as in the course notes (by considering $\mathcal{I} \circ f$ near a pole of f and $f \circ \mathcal{I}$ near the point ∞), what are the holomorphic bijections from S to S ?

1.6. * Find a conformal one-to-one map from $S \setminus [-1, +1]$ onto $S \setminus \bar{\mathbb{D}}$.

Hint: start with an inversion with pole at one of the extremities of the interval, to transform it into a half-line.

Deduce a conformal map from $\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ to $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. This is interesting because for once the domains are not simply connected.

1.7. * This exercise pertains more to differential calculus than to complex analysis.

Prove that a differentiable map $f : U_1 \longrightarrow U_2$ is conformal, or the conjugate of a conformal map, at $z_0 \in U_1$ if and only if

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

(a part of the statement, indeed the most important one, is that the limit exists).

Geometrically, this means that "small" circles around z_0 are mapped by f to curves which are asymptotically circular.

1.8. Again, there is not much complex analysis here.

Prove that the Riemann sphere is homeomorphic to

$$S^2 := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = 1 \right\} \cong \left\{ (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1 \right\},$$

where $\|\xi\|^2 = \|(x, y, t)\|^2 = x^2 + y^2 + t^2$ is the Euclidean norm, using the map

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

This map is called a stereographic projection (there are different versions of it).

* Is this map conformal? (you have to define a notion of angle on the sphere first).

1.9. * Complete the outline given to prove the Casorati-Weierstrass theorem.

2

Les exercices ou les questions signalés par une * ne sont pas obligatoires. À faire plus tard.

2.1. Démontrer que le groupe $\mathcal{H}(S)$ est engendré par les rotations $z \mapsto e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$; les homothéties $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$; les translations $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$; et l'inversion $\mathcal{I}$.

Indication: décomposition en éléments simples (qui se réduit ici à une division euclidienne).

Vous pouvez aussi utiliser le pivot de Gauss pour trouver un système générateur du groupe $GL(2, \mathbb{C})$ (si les méthodes matricielles ont votre faveur).

2.2. Démontrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle .

Indication: il suffit de le faire pour les générateur du groupe $\mathcal{H}(S)$ (pourquoi?).

2.3. a) Démontrer que pour tout choix de points distincts $a_1, a_2, a_3 \in S$, il existe $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ telle que $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(a_2) = 1$, $\varphi(a_3) = \infty$.

La valeur $\varphi(z)$ s'appelle le birapport (z, a_2, a_1, a_3).

Indications: quand $a_1, a_3 \in \mathbb{C}$, on eput écrire $\varphi(z) = c\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Il est facile de choisir α tel que $\varphi(a_1) = 0$, et β tel que $\varphi(a_3) = \infty$. Il ne reste plus qu'à déterminer c.

Discuter les différents cas qui se présentent quand un des a_j vaut ∞.

b) Calculer en détail les exemples des birapports de $(z, 1, \infty, 0)$ et $(z, 0, \infty, 1)$.

c) Démontrer que $\mathcal{H}(S)$ est transitif sur les triplets de points, c'àd qu'étant donnés (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3), des triplets ordonnés de points distincts de S, il existe $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ telle que $\varphi(a_j) = b_j$. Montrer que φ est unique.

Étant donnés deux cercles (ou deux droites) dans S, et deux points sur chaque cercle, montrer qu'il existe une unique $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ qui envoie le premier cercle sur le deuxième, et les points donnés sur le premier cercle sur ceux du deuxième, en respectant l'ordre.

2.4. a) Trouver une bijection conforme de $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ à $\mathbb{D}$.

b) Trouver une bijection conforme de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ à $\mathbb{D}$.

c) Trouver une bijection conforme de $\{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ à $\mathbb{D}$.

2.5. Nous voulons trouver tous les automorphismes (bijections holomorphes) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit f une bijection holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Indication : f^{-1} est une application continue. En déduire que $f \circ \mathcal{I}$ admet un pôle en 0.

b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $A, B > 0$ tels que $|f(z)| \leq A + B|z|^N$, $z \in \mathbb{C}$. En déduire, en utilisant les inégalités de Cauchy, que $f^{(N)}$ est bornée sur $\mathbb{C}$, et donc que f est un polynôme.

c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$.

*d) Si nous étendons la définition d'application holomorphe aux valeurs infinies comme dans les notes de cours (en considérant $\mathcal{I} \circ f$ près d'un pôle de f et $f \circ \mathcal{I}$ près du point ∞), quels sont les bijections holomorphes de S dans S ?

2.6. * Trouver une bijection conforme de $S \setminus [-1, +1]$ dans $S \setminus \bar{\mathbb{D}}$.

Indication : commencer par une inversion avec pôle à l'une des extremités de l'intervalle, pour le transformer en demi-droite.

En déduire une bijection conforme de $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$ dans $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$.

Ce qui est intéressant ici est que pour une fois, les domaines ne sont pas simplement connexes.

2.7. * Cet exercice relève plus du calcul différentiel que de l'analyse complexe.

Montrer qu'une application differentiable $f : U_1 \longrightarrow U_2$ est conforme en $z_0 \in U_1$ si et seulement si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

(ceci contient le fait que la limit existe, c'est même le point essentiel).

Géométriquement, ceci s'interprète en disant que des cercles "petits" autour de z_0 sont envoyés par f sur des courbes qui sont asymptotiquement circulaires.

2.8. À nouveau, il n'y a ici guère d'analyse complexe.

Montrer que la sphère de Riemann est homéomorphe à

$$S^2 := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = 1 \right\} \cong \left\{ (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1 \right\},$$

où $\|\xi\|^2 = \|(x,y,t)\|^2 = x^2 + y^2 + t^2$ est la norme euclidienne, en utilisant l'application

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

Cette application est appelée projection stéréographique (il y en a différentes versions).

* Cette application est-elle conforme? (il faut d'abord définir une notion d'angle sur la sphère).

2.9. * Donner les détails de la démonstration du théorème de Casorati-Weierstrass.