UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL ANALYSE HILBERTIENNE, TEST 3, MARDI 5 AVRIL 2016

PASCAL J. THOMAS

Ce sujet comporte deux pages. Les deux exercices sont indépendants. On est prié d'écrire toutes les réponses sur cette feuille.

NOM :

(1) On pose $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$, la fonction "porte", et on rappelle que $\hat{f}_0(\xi) = \text{sinc}\,(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$.

3

(1.1) En utilisant et en citant un résultat du cours, calculez la transformée de Fourier de $f_0 * f_0$.

Si f, g sont intégrables et bornées, $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$

Ici, $\mathcal{F}(f_0 * f_0)(\xi) = \left(\hat{f}_0(\xi)\right)^2 = \text{sinc}^2\xi = \dfrac{\sin^2 \pi\xi}{\pi^2\xi^2}$.

(1.2) En utilisant et en citant un résultat du cours, et la question précédente, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4\,(\xi) d\xi$.

5

(2 pour calcul $\int$)

(1 pour $f_0 \times f_0$)

Indication : $\text{sinc}^4\,(\xi) = |\text{sinc}^2\,(\xi)|^2$.

Si $f, \hat f$ sont des fonctions continues, intégrables, et bornées, alors le théorème de Plancherel donne $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat f|^2$. On prend $\hat f(\xi) = \text{sinc}^2\xi$,

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}^2\xi|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat f(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_0 * f_0(x)|^2 dx = 2\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{2}{3}$

(2) Dans tout ce qui suit, on se place dans l'espace de Hilbert $H := L^2(-\pi, \pi)$. Vous pouvez y penser (provisoirement !) comme à l'ensemble des fonctions continues par morceaux dont le module carré est intégrable au sens des intégrales généralisées. Le produit intérieur entre deux fonctions est donné par

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

(2.1) On note e_0 la fonction constante égale à 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $V_0 := \text{Vect}\{e_0\}$ (l'ensemble des fonctions constantes). Pour $f \in L^2(-\pi, \pi)$, montrer que la projection orthogonale de f sur V_0 est égale à la fonction constante égale à $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

(../..)

2+2 (../..) $\forall c,\ \int \left(f(x) - \frac{1}{2\pi}\int f\right) c \, dx = c\left(\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - 2\pi \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right) = 0.$

On a donc $f - p(f) \perp V_0$, $p(f) \in V_0$!
ce qui veut dire que $p(f) = \pi_{V_0}(f)$

3 (2.2) Soit $f, g \in H$, on suppose que f est paire et g impaire. Montrer que $\langle f, g\rangle = 0$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$x' = -x$
$$= \int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)} + \int_{\pi}^{0} f(x)\left(-\overline{g(x)}\right)(-dx)$$

$$= \int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)} - \int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0$$ (car $f\bar{g}$ est impaire)

2 (2.3) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction donnée par $e_n(x) := e^{inx}$.
On pose $V_1 = \mathrm{Vect}\{e_{-1}, e_0, e_1\}$. Rappeler pourquoi $\{e_{-1}, e_0, e_1\}$ est un système orthonormé.

$\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$ car $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}\,dx = 0$ pour $j \neq k$

6 (2.4) Soit V_P (resp. V_I) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) dans V_1. Donner des bases orthonormées de V_P et V_I.
Pour $f \in V_1$, donner la projection de f sur V_P.

Soit $f = a_{-1}e_{-1} + a_0 e_0 + a_1 e_1$

$f(-x) = a_{-1} e_1 + a_0 e_0 + a_1 e_{-1}$

$V_P = \{a_1 = a_{-1}\}$, $V_I = \{a_1 = -a_{-1},\ a_0 = 0\}$

Donc $V_I = \mathbb{C}\cdot(e_1 - e_{-1})$, base normée : $\frac{e_1 - e_{-1}}{\sqrt{2}}$
$= i\sqrt{2}\sin x$

$V_P = \mathrm{Vect}\{e_0,\ e_1 + e_{-1}\}$

base o.n. $\left\{e_0, \frac{e_1 + e_{-1}}{\sqrt{2}}\right\} = \{1, \sqrt{2}\cos x\}$.

$$\pi_{V_P}(f) = \langle f, e_0\rangle e_0 + \left\langle f, \frac{e_1+e_{-1}}{\sqrt{2}}\right\rangle \frac{e_1 + e_{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \langle f, e_0\rangle e_0 + (a_1 + a_{-1})\cdot\frac{e_1 + e_{-1}}{2}$$

$\pi_{V_P}(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ c'est la même chose.