UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL ANALYSE HILBERTIENNE, TEST 2, MARDI 15 MARS 2016

PASCAL J. THOMAS

Ce sujet comporte deux pages. Les deux exercices sont indépendants (et la question (2.4) est indépendante des autres questions du (2)). On est prié d'écrire toutes les réponses sur cette feuille.

NOM :

(1) On pose $e(x) := e^{-|x|}$, on rappelle que $\hat{e}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} = \frac{1}{\pi}(2\pi)\frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}$.

(1.1) On pose $P(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Calculer $\hat{P}(\xi)$.

(1.2) Calculer, sans utiliser de primitive, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

(2) On suppose dans tout ce qui suit que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2.1) On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f * \mathbf{1}$.

(2.2) On suppose ici que $t \mapsto tf(t)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $P(x) = ax + b$ (a et b sont deux constantes réelles).

Montrer que $f * P$ est bien défini.

(2.3) Avec les notations du (2.2), calculer $\frac{d}{dx}(f * P)(x)$. En déduire que $f * P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

(2.4) On suppose désormais que $f(x) \geq 0$, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ et que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a + 2$. On pose $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a, b]$, $= 0$ si $x \notin [a, b]$.

Montrer que $0 \leq f * \chi_{[a,b]}(x) \leq 1$, que $f * \chi_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a + 1, b - 1]$, et que $f * \chi_{[a,b]}(x) = 0$ si $x \notin [a - 1, b + 1]$.