UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL ANALYSE HILBERTIENNE, TEST 2, MARDI 15 MARS 2016

PASCAL J. THOMAS

Ce sujet comporte deux pages. Les deux exercices sont indépendants (et la question (2.4) est indépendante des autres questions du (2)). On est prié d'écrire toutes les réponses sur cette feuille.

NOM : Corrigé

(1) On pose $e(x) := e^{-|x|}$, on rappelle que $\hat{e}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2} = \frac{1}{\pi}(2\pi)\frac{1}{1+(2\pi\xi)^2}$. (*)

(1.1) On pose $P(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Calculer $\hat{P}(\xi)$.

$$\mathcal{F}(e(2\pi x))(\xi) = \frac{1}{2\pi}\hat{e}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{1}{\pi}P(\xi),$$

donc $P(\xi) = \mathcal{F}(\pi e(2\pi x))(\xi) = \mathcal{F}(\pi e^{-2\pi|x|})(\xi)$

Par la formule d'inversion, $\hat{P}(x) = \pi e^{-2\pi|-x|} = \pi e^{-2\pi|x|}$.

[Remarque : $\hat{P}(0) = \pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, résultat bien connu]

(1.2) Calculer, sans utiliser de primitive, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.

D'après le théorème de Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2\,dx.$$

Donc $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}P(x)^2\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\pi^2 e^{-4\pi|x|}\,dx = 2\pi^2\int_0^{\infty}e^{-4\pi x}\,dx$$

$(u = 4\pi x)$ $$= 2\pi^2\int_0^{\infty}e^{-u}\frac{du}{4\pi} = \frac{2\pi^2}{4\pi}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

(*) autre solution :

$P(x) = \frac{1}{2}\hat{e}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, donc $\hat{P}(\xi) = \frac{1}{2}2\pi\hat{\hat{e}}(2\pi\xi)$

$= \pi\cdot e(-2\pi\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$.

(2) On suppose dans tout ce qui suit que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2.1) On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f * \mathbf{1}$.

$$f * 1\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot 1\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt,$$
ne dépend pas de x.

(2.2) On suppose ici que $t \mapsto tf(t)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $P(x) = ax + b$ (a et b sont deux constantes réelles).

Montrer que $f * P$ est bien défini.

$$f * P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(t)(ax+b) - at\,f(t)\big)\,dt = (ax+b)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt - a\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt,$$
car ces 2 intégrales convergent (absolument).

(2.3) Avec les notations du (2.2), calculer $\frac{d}{dx}(f * P)(x)$. En déduire que $f * P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(t)P(x-t)\big) = a\,f(t)$, qui est absolument intégrable et indépendant de x, donc $f * P$ est dérivable

et $f * P(x) = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, constante.

$\frac{d}{dx}(f * P) =$ constante, donc $f * P$ est un polynôme de degré ≤ 1.

(2.4) On suppose désormais que $f(x) \geq 0$, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ et que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a + 2$. On pose $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a, b]$, $= 0$ si $x \notin [a, b]$.

Montrer que $0 \leq f * \chi_{[a,b]}(x) \leq 1$, que $f * \chi_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a + 1, b - 1]$, et que $f * \chi_{[a,b]}(x) = 0$ si $x \notin [a - 1, b + 1]$.

On a $0 \leq \chi_{[a,b]}(x-t) \leq 1 \quad \forall x, t$,

donc $\forall x, t$, $\quad 0 \leq \chi_{[a,b]}(x-t)\,f(t) \leq f(t)$,

donc $\quad 0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}(x-t)\,f(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$

$f * \chi_{[a,b]}(x) = \int_{-1}^{1} \chi_{[a,b]}(x-t)\,f(t)\,dt$. Si $x < a-1$, $x - t < a-1+1 = a$, donc $\chi_{[a,b]}(x-t) = 0$; si $x > b+1$, $x - t > b+1-1 = b$, donc $\chi_{[a,b]}(x-t) = 0$.

Dans les 2 cas l'intégrale est nulle.

Si $a+1 < x$, $x - t > a+1-1 = a$; de plus $x < b-1 \Rightarrow x - t < b-1-(-1) = b$, donc $\chi_{[a,b]}(x-t) = 1$ dans tous les cas et $f * \chi_{[a,b]}(x) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 1$.