UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL CONTRÔLE TERMINAL, MARDI 13 MAI 2014, 13 H 30 – 15 H 30

PASCAL J. THOMAS

Cette épreuve comporte deux problèmes. Il y a beaucoup de questions indépendantes. Faites ce que vous savez faire dans le temps imparti, vous n'avez pas besoin de tout faire, mais faites bien (et faites des questions des deux problèmes).

Les téléphones portables sont interdits pendant l'épreuve.

Problème 1.

On pose $E = \mathcal{C}([-1,1])$ (l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$). On pose, pour $f, g \in E$,

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

(1) Montrer que l'intégrale ci-dessus converge pour tous $f, g \in E$.
(2) Montrer que $\langle f, g \rangle$ définit un produit hermitien. On note $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$ la norme associée.
(3) En faisant le changement de variable $\theta = \arccos x$, montrer que

$$\langle f, g \rangle := \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\overline{g(\cos\theta)} d\theta.$$

(4) On définit la fonction T_n sur l'intervalle $[-1,1]$ par $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta \in [0,\pi]$. Donner T_0, T_1, T_2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n coïncide avec une fonction polynômiale de degré n (on peut utiliser des exponentielles complexes).
(5) Calculer $\langle T_n, T_n \rangle$.
(6) Montrer le système $S_n := \{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ est orthogonal, et est une base du sous-espace de E constitué des fonctions polynomiales de degré $\leq n$.
(7) On pose $\tilde{T}_n := \frac{1}{\|T_n\|} T_n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, donner les coordonnées de la fonction $f(x) = x^p$ dans cette base (on peut utiliser des exponentielles complexes).
(8) On admet que les polynômes forment un sous-ensemble dense de $L^2[-1,1]$. Montrer que $\{\tilde{T}_n, n \geq 0\}$ forme une base hilbertienne de $L^2[-1,1]$.

NB — Cette famille de polynômes orthogonaux est connue sous le nom de *polynômes de Tchebycheff* (Chebyshev en translitération anglaise).

Problème 2.

Dans tout le problème, on considère une fonction f continue et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ qui a la propriété que sa transformée de Fourier $\hat{f}$ vérifie que, pour une certaine constante $C_0 > 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{C_0}{|\xi|^{3/2}}.$$

(1) Montrer que pour $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{|\xi|^{3/2}} d\xi$ converge et calculer sa valeur.

Montrer que $\hat{f}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que si $x, h \in \mathbb{R}$,

$$f(x+h) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2\pi i h\xi} - 1) e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

(3) Montrer qu'il existe une constante C_1 (dépendant de f) telle que si $h \neq 0$,

$$\left| \int_{-\infty}^{-1/|h|} (e^{2\pi i h\xi} - 1) e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi + \int_{1/|h|}^{+\infty} (e^{2\pi i h\xi} - 1) e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right| \leq C_1 |h|^{1/2}.$$

(4) Montrer, qu'il y a une constante absolue c_0 telle que pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$|e^{iy} - 1| \leq c_0 |y|.$$

(On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis, ou d'autres méthodes).

(5) Montrer qu'il existe une constante C_2 (dépendant de C_0) telle que si $h \neq 0$, $|h| \leq 1$,

$$\left| \int_{-1/|h|}^{1/|h|} (e^{2\pi i h\xi} - 1) e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right| \leq C_2 |h|^{1/2}.$$

(6) En déduire qu'il existe une constante C_4 telle que si $x \in \mathbb{R}$, $h \in [-1, 1]$,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_4 |h|^{1/2}.$$