UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
LE PROCÉDÉ D'ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT

PASCAL J. THOMAS

Le but de ces quelques lignes est d'expliciter un procédé utile pour obtenir des bases orthogonales, qui est essentiellement contenu dans le cours de J. Tapia.

Théorème 8.1. *Soit Q une forme bilinéraire non-dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soient $v_1, v_2, \dots, v_m$ des vecteurs indépendants. On note $V_j := Vect\{v_1, \dots, v_j\}$. On suppose que pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $Q|_{V_j}$ est non-dégénérée.*

Alors il existe une base orthogonale $x_1, \dots, x_m$ telle que pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $Vect\{x_1, \dots, x_j\} = V_j$.

Si de plus E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et Q est définie positive (ce qui est le cas le plus souvent utilisé), alors l'hypothèse que $Q|_{V_j}$ est non-dégénérée est automatiquement satisfaite, et on peut choisir la base $x_1, \dots, x_m$ orthonormée.

Remarque : si on prend $m = n$, on obtient en particulier une base de E.

Démonstration.

Nous allons prouver, par récurrence sur j, qu'il existe une base orthogonale $\{x_1, \dots, x_j\}$ de V_j telle que $Q(x_j, x_j) \neq 0$ pour tout j.

Si $j = 1$, on prend $x_1 := v_1$. Comme $\{v_1\}$ est indépendant, $v_1 \neq 0$, et c'est une base de $\text{Vect}\{v_1\}$, orthogonale de façon triviale. Comme $Q|_{V_1}$ est non-dégénérée, $Q(v_1, v_1) \neq 0$.

Supposons la propriété prouvée pour un certain $j \leq m - 1$. On cherche x_{j+1} sous la forme $x_{j+1} = v_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Comme $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i \in V_j$, on a $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{j} \mu_i v_i$ pour certains scalaires μ_i, et on voit que $\{x_1, \dots, x_j, x_{j+1}\}$ est un système indépendant, donc une base de V_{j+1}, quel que soit le choix des λ_i.

Pour en faire une base orthogonale considérons, pour tout $k \leq j$,

$$Q(x_{j+1}, x_k) = Q(v_{j+1}, x_k) - \sum_{i=1}^{j} \lambda_i Q(x_i, x_k) = Q(v_{j+1}, x_k) - \lambda_k Q(x_k, x_k).$$

Comme $Q|_{V_k}$ est non-dégénérée, $Q(x_k, x_k) \neq 0$, on peut donc choisir $\lambda_k := \frac{Q(v_{j+1}, x_k)}{Q(x_k, x_k)}$ et on obtient une base orthogonale.

Il reste à voir que $Q(x_{j+1}, x_{j+1}) \neq 0$. Mais si c'était le cas, alors comme $\{x_1, \dots, x_j, x_{j+1}\}$ est une base de V_{j+1}, on aurait que $x_{j+1} \in \operatorname{Ker} Q|_{V_{j+1}}$, ce qui est exclu par l'hypothèse.

Dans le cas où Q est définie positive, sa restriction sur chaque sous-espace l'est aussi, et donc automatiquement non-dégénérée. De plus, on peut remplacer x_k par $x'_k := Q(x_k, x_k)^{-1/2} x_k$ qui vérifiera $Q(x'_k, x'_k) = 1$. $\square$