UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 6 - QUADRIQUES ET ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES ET ORTHOGONAUX

PASCAL J. THOMAS

10. Encore des formes quadratiques, et un peu de coniques et quadriques

10.1. a) Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A = {}^tTT$. Indication : procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué pour le produit scalaire défini par A.

b) Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux.

10.2. Trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ qui sont parallèles au plan d'équation $x + 4y + 6z = 0$.

10.3. Soit dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique q définie dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ par :

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

dont on note Q la forme polaire associée. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $X_a(Q)$ la quadrique d'équation $q(x) = a$.

a) Montrer que $X_a(Q) \neq \emptyset$.

b) Soit D une droite isotrope et posons $F = D^\perp$. Montrer que $F \cap X_1(Q)$ est réunion de deux droites affines parallèles et distinctes.

c) Réciproquement, montrer que par tout point $x \in X_1(Q)$ passent exactement deux plans vectoriels F_1 et F_2 tels que $F_1^\perp$ et $F_2^\perp$ sont des droites isotropes. Montrer que de plus $F_2^\perp = s(F_1^\perp)$ où s désigne la symétrie axiale par rapport à la droite $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$.

d) Définir deux bijections $\varphi_1, \varphi_2 : S \times \mathbb{R} \longrightarrow X_1(Q)$ où S désigne le cercle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0$.

e) Quel est l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels un résultat analogue soit valable pour la quadrique $X_a(Q)$? Que peut-on dire si on remplace partout le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels par le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes?

11. Endomorphismes symétriques et orthogonaux

11.1. On se donne un plan hyperbolique ($\mathbb{R}^2$ muni d'une forme quadratique de signature $(1,1)$). Déterminer toutes les bijections linéaires qui conservent la forme quadratique.

11.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'un produit scalaire. On note u^* l'adjoint d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{A} := \{u \in \mathcal{L}(E) : u = uu^*u\}$.

a) Montrer que $u \in \mathcal{A}$ si et seulement si $u^* u$ est une projection orthogonale.
b) Montrer que $u \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
c) Réciproquement, si $u \in \mathcal{A}$ et $\|u(x)\| = \|x\|$, alors $x \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

11.3. Soit $E_N := \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq N\}$. On considère le produit scalaire $(P|Q) := \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ et l'application $u : E_N \longrightarrow E_N$ donnée par

$$u(P)(x) := \int_0^1 (x+t)^N P(t)dt.$$

a) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E_N)$, qu'il est bijectif et symétrique par rapport au produit scalaire donné.
b) Soit $P_0, \ldots, P_N$ une base de E_N constituée de vecteurs propres pour u, pour les valeurs propres $\lambda_0, \ldots, \lambda_N$. Montrer que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

et

$$\int_0^1 (x+t)^{2n} dt = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k P_k(x)^2.$$

c) Calculer $\mathrm{Tr} u$ et $\mathrm{Tr} u^2$.

11.4. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique $n \times n$ réelle. On note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{k} a_{j,j} \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

11.5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée q (Q étant la forme bilinéaire symétrique associée). On note u^* l'adjoint d'un endomorphisme u par rapport à Q. On suppose que $u^* = u^{-1}$ (c'est-à-dire que u est orthogonal) et on pose $\sigma := (Id - u)(Id + u)^{-1}$ (transformation de Cayley).
a) Montrer que $\sigma^* = -\sigma$ et que $\sigma + Id$ est bijective.
b) Montrer que $u = (Id - \sigma)(Id + \sigma)^{-1}$.
c) En déduire que si $n = \dim E$ est impaire, toute transformation orthogonale de déterminant 1 admet un vecteur propre pour la valeur propre 1.

11.6. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{2m}$ muni d'une forme quadratique q d'indice de Witt maximal, plus précisément donnée dans la base canonique par la matrice par blocs

$$M(q) := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},$$

où I_m désigne la matrice identité $m \times m$.

Soit φ l'endormorphisme de $\mathbb{K}^{2m}$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix},$$

où A est une matrice $m \times m$. Montrer que φ est orthogonal par rapport à q si et seulement si $A + {}^t A = 0$.