UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 5 - FORMES BILINÉAIRES ET QUADRATIQUES

PASCAL J. THOMAS

8. Formes bilinéaires

8.1. On considère, sur l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^2$, la forme bilinéaire donnée par $B(x,y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$. On pose $e_1 := (1,0)$. Trouver un vecteur v tel que $e_1 \perp v$ mais $v \not\perp e_1$ (la relation d'orthogonalité n'est pas symétrique).

Déterminer la forme quadratique Q associée à B et l'unique forme bilinéaire symétrique B_1 associée à Q. Trouver l'orthogonal de $\mathbb{R}e_1$ pour B_1.

8.2. Soit, pour $N \geq 2$, $E_N := \{P \in \mathbb{C}[X] : P(0) = P(1) = 0, \deg P \leq N\}$ (on admet que c'est un espace vectoriel de dimension $N-1$). On définit

$$B(P,Q) := \int_0^1 P(x)Q'(x)dx.$$

Montrer que c'est une forme bilinéaire antisymétrique sur E_N.

8.3. Soit, pour $N \geq 2$, $E_N := \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq N\}$ (on admet que c'est un espace vectoriel de dimension $N+1$). On définit

$$B(P,Q) := \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx.$$

Montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique. Déterminer son noyau. Montrer que la restriction de B à $F_N := \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 0, \deg P \leq N\}$ est non-dégénérée.

L'application $\Phi : F_N \longrightarrow \mathbb{R}$: $P \mapsto P'(0) = \Phi(P)$ est une forme linéaire. Trouver un polynôme Q tel que pour tout $P \in F_3$, $B(P,Q) = \Phi(P)$.

8.4. On rappelle que l'espace $\mathbb{R}_2[X,Y]$ des polynômes à coefficients réels à deux variables de degré ≤ 2 est de dimension 6.

Soit E l'espace des polynômes trigonométriques de degré ≤ 2, c'est-à-dire des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ où $P \in \mathbb{R}_2[X,Y]$.

a) Déterminer la dimension de E (indication : ce n'est pas 6).

b) On définit

$$B(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Montrer rapidement que c'est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Trouver une matrice de B dans une base bien choisie (penser à votre cours d'analyse hilbertienne).

c) L'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$: $P \mapsto P(0) = \Phi(P)$ est une forme linéaire. Trouver une fonction f_0 tel que pour toute $f \in E$, $B(f, f_0) = \Phi(f)$.

d) En démontrant et utilisant le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\int_0^{2\pi} f(x+t)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$, trouver pour tout $t \in \mathbb{R}$ une fonction f_t telle que $B(f, f_t) = f(t)$.

8.5. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire B non-dégénérée. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $E = E_1 \oplus E_1^\perp$ si et seulement la restriction de B à E est non-dégénérée.

9. Formes quadratiques, méthode des carrés de Gauss

9.1. Soit $E := \mathbb{R}^4$; ses éléments sont notés (x_0, x_1, x_2, x_3), et sa base canonique (e_0, e_1, e_2, e_3).

On considère la forme quadratique sur E donnée par $Q(x) := -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (forme de Lorentz). Déterminer les sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}e_0$, $\mathrm{Vect}(e_0, e_1)$, et $\mathrm{Vect}(e_0 + e_1, e_3)$.

9.2. On considère la forme bilinéaire symétrique B sur $\mathbb{C}^3$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quel est le rang de B? On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ donné par $F := \{x : x_1 = 2x_2 - x_3\}$. Déterminer $F^\perp$.

9.3. Quels sont les sous-espaces vectoriels totalement isotropes maximaux de la forme forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ donnée par $Q(x) := -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$?

9.4. On considère, sur l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^4$, la forme quadratique donnée par

$$Q(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_3x_4 + x_1x_4 + 3x_1x_2 - x_2x_4.$$

Décomposer Q en somme de carrés de formes linéaires (avec des coefficient $+1$ ou -1) par la méthode de Gauss. Quel est son indice de Witt ? Décomposer E en somme directe orthogonale de plan(s) hyperbolique(s) et d'un espace anisotrope.

9.5. On considère, sur l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^n$, la forme quadratique donnée par

$$Q(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Montrer qu'elle est associée à une forme bilinéraire non dégénérée.

Montrer qu'on peut trouver des formes linéaires φ_i, $1 \leq i \leq n$, telles que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{2i} \varphi_i(x)^2.$$