UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL, 2015-16
TD 5 - PROJECTIONS, BASES HILBERTIENNES

PASCAL J. THOMAS

1. Orthogonal d'un sous-espace et densité

Soit E un espace vectoriel à coefficients complexes, avec un produit intérieur noté $\langle x, y\rangle$. La norme est donnée par $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$. Nous rappelons quelques définitions.

Rappels.
Si $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^\perp := \{x \in E : \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

On voit immédiatement que si $A \subset B$, $B^\perp \subset A^\perp$. On montre que $A^\perp$ est toujours un espace vectoriel (même si A est un ensemble quelconque) et que $A \cap A^\perp = \{0\}$.

Si E est de dimension finie, $(A^\perp)^\perp = \operatorname{Vect} A$ (sous-espace vectoriel engendré par A).

On dit qu'un ensemble A est *fermé* si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède une limite x (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$), alors $x \in A$.

Plus généralement, on appelle *adhérence* de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble de toutes les limites de suites convergentes contenues dans A. C'est un ensemble fermé qui contient A (en fait, c'est le plus petit possible).

On dit qu'un ensemble A est *dense* dans E si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède pour limite x. Autrement dit, $\overline{A} = E$.

1.1. Pour tout sous-ensemble $A \subset E$, montrer que $A^\perp$ est fermé (indication : Cauchy-Schwarz).

1.2. On va montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$.

(a) Montrer que pour tout sous-ensemble $A \subset E$, $A \subset (A^\perp)^\perp$. Déduire de l'exercice précédent que $\overline{A} \subset (A^\perp)^\perp$.

(b) Réciproquement, si $v \in E$, dans quel sous-espace doit être $v - p_{\overline{A}}(v)$? Si $v \in (A^\perp)^\perp$, montrer que $\langle v - p_{\overline{A}}(v), v - p_{\overline{A}}(v)\rangle = 0$ et en déduire que $v \in \overline{A}$.

(c) Corollaire : A est dense dans E si et seulement si $A^\perp = \dots$?

1.3. On considère $E := \mathcal{C}[-1, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. On appelle W le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que W est fermé.

Montrer que $W^\perp = \{f \in E : \int_{-1}^1 f(x)dx = 0\}$.

Soit $f \in E$. Quelle est la projection de f sur W ? Sur $W^\perp$?

Mêmes questions avec P qui est le sous-espace des fonctions paires.

1.4. Dans le même espace E, on pose $V := \{f \in E : f(0) = 0\}$. Soit $g(x) = 1$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

Montrer que $g \notin E$, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in E$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. En déduire qu'il n'existe pas de projection de g sur V, et que V n'est pas fermé.

1.5. On considère un espace vectoriel E muni d'un produit intérieur. On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$. Une forme linéaire φ est continue si et seulement si pour toute suite $(f_n) \subset E$ telle que $f = \lim_n f_n$ (au sens de la norme donnée par le produit intérieur), alors $\lim_n \varphi(f_n) = \varphi(f)$.

(a) Si φ est continue, montrez que $\operatorname{Ker} \varphi$ est un sous espace vectoriel fermé.

(b) On prend E comme dans l'exercice 1.3, et $\varphi_0(f) := f(0)$. Montrer que φ_0 est forme linéaire non continue.

(c) On reprend E un espace vectoriel quelconque E muni d'un produit intérieur. Montrer que pour tout $g \in E$, $\varphi_g(f) := \langle f, g \rangle$ définit une forme linéaire continue.

(d) Désormais on suppose que E est un espace de Hilbert, et φ une forme linéaire continue non identiquement nulle. Montrer qu'on peut trouver $g \in (\operatorname{Ker} \varphi)^\perp$ telle que $\varphi(g) = \|g\|^2$ (indication : prendre $g_0 \in (\operatorname{Ker} \varphi)^\perp \setminus \{0\}$, et la multiplier par un scalaire convenable), et que $\{g\}$ est une base de $(\operatorname{Ker} \varphi)^\perp$ (indication : si $f \in (\operatorname{Ker} \varphi)^\perp$, trouver λ tel que $\varphi(f - \lambda g) = 0$).

(e) Montrer que pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = \langle f, g \rangle$ (indication : trouver λ tel que $\varphi(f - \lambda g) = 0$ et décomposer $f = (f - \lambda g) + \lambda g$).

Donc, toute forme linéaire continue peut se représenter par un produit intérieur comme dans la question (c). Ceci s'appelle le *Théorème de représentation de Riesz.*

1.6. Il existe d'autres normes que les normes données par des produits intérieurs. Leurs propriétés de projection ne sont pas aussi bonnes. On va montrer que même quand le sous-espace est fermé, la projection peut ne pas exister. C'est un peu plus compliqué que les exercices précédents.

On prend $E := \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(0) = 0\}$, muni de la norme uniforme, $\|f\|_\infty := \max_{[0,1]} |f|$. On pose $V := \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, et $g(t) = t$.

Montrer que V est fermé au sens de la norme uniforme et que $g \notin V$.

Soit $\beta > 0$. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(x) := \max(-\alpha x, x - \frac{1}{2} - \beta)$. Montrer (en utilisant par exemple le théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe une valeur $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ telle que $f_{\alpha(\beta),\beta} \in V$. On posera $f_\beta := f_{\alpha(\beta),\beta}$.

Montrer que $\|g - f_\beta\|_\infty = \frac{1}{2} + \beta$, et donc que $\inf_{f \in V} \|g - f\|_\infty = \frac{1}{2}$.

On va montrer que cette borne inférieure n'est jamais atteinte. On rappelle l'inégalité des accroissements finis : si $h \in \mathcal{C}^1[0,1]$, alors $|h(1) - h(0)| \leq \max_{[0,1]} |h'|$, avec égalité si et seulement si h est une fonction affine (c'est-à-dire que h' est constante).

Soit $f \in V$. On pose $h(x) := \int_0^x g(t) - f(t)dt$. Est-ce une fonction affine ? Calculer $h(1) - h(0)$ et en déduire que $\|g - f\|_\infty > \frac{1}{2}$.

2. Bases hilbertiennes

2.1. Voici un exemple d'espace à produit intérieur (qui n'est pas de Hilbert) tiré de l'analyse complexe, qui a des applications (que je ne connais pas) en génie électrique.

Une *fraction rationnelle* est une fonction de la forme $f(z) := P(z)/Q(z)$, où P et Q sont des polynômes à coefficients complexes sans facteur commun (Q n'est pas le polynôme nul). Elle est holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

On considère l'espace vectoriel des fractions rationnelles qui n'ont aucun pôle sur le disque unité fermé :
$$RH^2 := \left\{ f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : Q(z) \neq 0, \forall z : |z| \leq 1 \right\},$$
muni du produit intérieur suivant :
$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} f(z)\overline{g(z)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

(a) Montrer que cette formule définit bien un produit intérieur.

(b) Montrer que $(z^n, n \in \mathbb{N})$ définit un système orthonormé, complet (pour la densité, on pourra utiliser l'exercice 1.2).

(c) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit A_m le sous-espace des fonctions qui ont un zéro d'ordre au moins égal à m en zéro, c'est-à-dire $A_m := \{f \in RH^2 : f^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k \leq m-1\}$. Déterminer $A_m^\perp$.

*(d) En utilisant la formule de Cauchy, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que si $f_n \to f$ au sens de la norme de RH^2, alors $f_n \to f$ uniformément sur le disque $\{|z| \leq \frac{1}{2}\}$.

(e) On considère la suite $f_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$. Montrer que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans RH^2, mais qu'elle n'est pas convergente (donc RH^2 n'est pas un espace de Hilbert).

2.2. On se place dans $H := L^2(-\pi, \pi]$. On prolonge toutes les fonctions pour être périodiques de période 2π, autrement dit, si $x \in (\pi, 3\pi]$ par exemple, on pose $f(x) := f(x - 2\pi)$, et ainsi de suite.

On rappelle que quand f et g sont dans cet espace, dont l'existence est admise, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$ ont un sens (qui correspond au sens habituel quand f et g sont par exemple bornées et continues par morceaux, ou dès qu'on peut définir ces intégrales au sens des intégrales généralisées) ; qu'il contient l'ensemble des fonctions continues comme un sous-espace dense ; mais qu'on assimile toute fonction f telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$ à la fonction nulle. Par exemple, deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points seront considérées comme égales.

On pose toujours
$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

On rappelle que la densité des fonctions continues dans H implique que pour tout $f \in H$, $\lim_{n \to \infty} \|S_n(f) - f\| = 0$, et donc que $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de H, où $e_n(x) := e^{inx}$.

Soit A l'espace des fonctions π-périodiques, c'est-à-dire telles que $f(x + \pi) = f(x)$, pour tout x.

On pose $A_0 := \{e_{2k}, k \in \mathbb{Z}\}$, $A_1 := \{e_{2k+1}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que A_0 est un système orthonormé et que $A_0 \subset A$.

(b) Montrer que $A_1 \subset A^\perp \subset A_0^\perp$.

(c) Montrer que $\overline{\operatorname{Vect} A_0} \subset A_1^\perp$. En utilisant le fait que $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de H, montrer que $\overline{\operatorname{Vect} A_0} = A_1^\perp$.

(d) Montrer que A est fermé, et en déduire que $A = A_1^\perp$.

2.3. On se place dans E un espace de Hilbert (toute suite de Cauchy est convergente).

Soit $S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé. Soit $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ une suite de coefficients telle que $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

Montrer que $\sum_n c_n x_n := \lim_n \sum_{k=0}^n c_k x_k$ est bien défini comme élément de E.

On suppose pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $c_n \neq 0$. Montrer que $\sum_n c_n x_n$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs x_n (une base hilbertienne infinie n'est pas une base au sens habituel).

2.4. On se place à nouveau dans $H := L^2(-\pi, \pi]$. Voici un exemple intéressant de la situation précédente.

(1) Montrez, comme une conséquence de l'exercice 2.3 que la fonction définie par

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \cos(jx)$$

est dans H, alors que la série n'est pas absolument convergente.

(2) (Plus dur !) Montrez que pour $x \neq 0$, la série converge.

Nous allons procéder ainsi : on pose $A_n(x) := \sum_{j=1}^n \cos(jx)$. Montrer que $|A_n(x)| \leq n$. Montrer que

$$A_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} - 1.$$

Indication : $A_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^n e^{ijx}\right)$.

En déduire que $|A_n(x)| \leq \frac{C}{|x|}$, pour une certaine constante C.

Maintenant, on procède à la transformation d'Abel : montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cos(jx) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) A_j(x) + \frac{1}{n} A_n(x),$$

et en déduire la convergence de la série.

(3) (Subtil) Déduire des calculs ci-dessus que $|f(x)| \leq C_1 + C_2 |\ln |x||$, pour $x \neq 0$. Méthode : déduire de la question précédente que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) A_j(x).$$

Puis, étant donné $x \neq 0$, choisir n tel que $n \leq |x|^{-1} \leq n + 1$, et majorer la somme ci-dessus en traitant séparément $\sum_{j=1}^n$ et $\sum_{j=n+1}^{\infty}$ avec les deux majorations possibles pour $A_n(x)$.