UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL, 2014-15
TD 5 - POLYNÔMES ORTHOGONAUX

PASCAL J. THOMAS

Nous rappelons brièvement le *procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :* étant donné un système libre $S = \{x_1, x_2 \dots\}$, qui peut être fini ou infini, on pose V_n pour l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \dots x_n\}$. On cherche un système *orthonormé* $\tilde{S} = \{y_1, y_2 \dots\}$ tel que l'espace vectoriel engendré par $\{y_1, \dots y_n\}$ soit égal à V_n, pour tout n.

Une façon d'obtenir un tel système est de choisir, pour chaque n, l'unique vecteur z_n qui soit orthogonal à V_{n-1} et tel que $z_n = x_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k$. Pourquoi ce vecteur est-il unique ? (indication : si z'_n était un autre vecteur avec les mêmes propriétés, $z_n - z'_n \in V_n$...) Pourquoi cela donne-t-il un système orthogonal tel que l'espace vectoriel engendré par $\{z_1, \dots z_n\}$ soit égal à V_n, pour tout n ?

Appelons $\pi_n(v)$ la projection orthogonale de v sur V_n.

1. Un moyen de trouver des z_n comme ci-dessus est d'écrire $z_n = x_n - \pi_n(x_n)$ (le démontrer). On pose alors $y_n := \frac{1}{\|z_n\|} z_n$.

Montrer qu'on peut construire récursivement les y_n en posant $z_n := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, y_k \rangle y_k$.

2. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$.

On considère $S := \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Calculer les trois premières fonctions du système orthonormal obtenu par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. C'est un exemple de ce qu'on appelle *polynômes orthogonaux*.

Théorème 0.1. *Théorème d'approximation de Weierstrass. Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est la limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Une démonstration de ce théorème est donnée dans votre partiel, mais il en existe beaucoup d'autres.

3. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. Voici un exemple de famille de polynômes orthogonaux, connue sous le nom de *polynômes de Legendre :*

$$f_n(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left((1 - x^2)^n\right), \quad n \geq 0.$$

(1) Montrer que f_n est un polynôme de degré n.
(2) Montrer que $\int_{-1}^1 f_n(x)dx = 0$ pour $n \geq 1$.
(3) Si $n > m \geq 1$, montrer que $\int_{-1}^1 f_n(x)f_m(x)dx = 0$. Indication : intégrer par parties en dérivant $m + 1$ fois f_m.

4. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit intérieur
$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$
Nous allons donner un autre exemple de famille de polynômes orthogonaux, connue sous le nom de *polynômes de Tchebycheff* (Chebyshev en translitération anglaise).

(1) Montrer qu'on a bien un produit intérieur (en particulier, pourquoi l'intégrale converge-t-elle ?)

(2) En faisant le changement de variable $x = \cos\theta$, montrer que
$$\langle f, g\rangle := \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\overline{g(\cos\theta)}d\theta.$$

(3) On définit la fonction T_n sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta \in [0, \pi]$. Donner T_0, T_1, T_2. Démontrer par récurrence que T_n coïncide avec une fonction polynômiale de degré n. (On pourra utiliser les formules d'additions des rapports trigonométriques, et le fait que $\sin\theta\sin((n-1)\theta) = \cos\theta\cos((n-1)\theta) - \cos(n\theta)$).

On peut aussi faire une démonstration directe en représentant les fonctions trigonométriques à l'aide d'exponentielles complexes.

(4) Montrer le système $S := \{T_0, T_1, \dots, T_n, \dots\}$ est orthogonal.

(5) Une autre façon de construire les polynômes de Tchebycheff est d'utiliser la formule de Rodrigues. On pose
$$\tilde{T}_n(x) := \sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right), \quad n \geq 0.$$
Montrer que $\tilde{T}_n$ est un polynôme de degré n.

(6) Montrer que $\tilde{S} := \{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n, \dots\}$ est orthogonal, et en déduire qu'il existe des constantes c_n telles que $\tilde{T}_n = c_n T_n$.

Il existe une autre méthode pour trouver des bases hilbertiennes de l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ qui repose sur le calcul de fonctions propres pour un certaine équation différentielle linéaire d'ordre 2, avec des conditions au bord bien choisies. On parle alors de *problème de Sturm-Liouville.* Les bases obtenues avec des sinus et des cosinus dans le cadre des séries de Fourier sont un cas particulier de cette méthode. Nous n'aurons pas le temps d'approfondir cette question.

5. (Polynômes de Hermite)

Le but de ce long exercice est de construire une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, composée de vecteurs propres pour la transformation de Fourier.

On pose
$$h_n(x) := e^{\pi x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(e^{-2\pi x^2}\right).$$

(1) Montrer qu'il existe un polynôme $H_n(x)$ tel que $h_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$.

On appellera H_n *polynôme de Hermite* (vous noterez que ce n'est pas la normalisation habituelle pour les polynômes de Hermite, que l'on obtient en appliquant une dilatation de la variable x et en multipliant par une constante).

(2) Montrer que h_n est paire (comme fonction) si et seulement si n est pair (comme nombre entier), et que h_n est impaire si et seulement si n est impair.

(3) Montrer que

$$h_n(x) = h'_{n-1}(x) - 2\pi x h_{n-1}(x). \tag{1}$$

(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(5) En utilisant l'équation (1), montrer par récurrence que $\hat{h}_n(\xi) = (-i)^n h_n(\xi)$.

(6) On pose $F_n(x) := e^{-\pi x^2} h_n(x)$. Montrer en intégrant par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k F_n(x) dx = 0 \text{ pour } 0 \leq k < n.$$

(7) En déduire que pour $n \neq m$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) h_m(x) dx = 0$.

On pose $c_n := \int_{-\infty}^{+\infty} h_n^2(x) dx$. Montrer que $c_n > 0$.

(8) On appelle E l'espace des fonctions f telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-2\pi x^2} dx$ converge.

Montrer que tout polynôme est contenu dans E.

On munit E du produit hermitien défini par $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{g}(x) e^{-2\pi x^2} dx$. Montrer que les polynômes (H_n) forment une famille orthogonale dans E.

(9) **On admet que** pour toute (classe de) fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P_ε tel que $\|f - e^{-\pi x^2} P_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

En déduire qu'il existe une suite de nombres complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k h_k\| = 0$.

Donc $\{\frac{1}{\sqrt{c_n}} h_n, n \in \mathbb{N}\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. On pose $\tilde{h}_n := \frac{1}{\sqrt{c_n}} h_n$.

(10) Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose $\lambda_j(f) := \langle f, \tilde{h}_j \rangle$.

Montrer que $\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(f) \tilde{h}_k \right\| = 0$.

(11) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f définie par la formule intégrale habituelle, est égale à $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-i)^k \lambda_k(f) \tilde{h}_k$ (la limite étant prise au sens de la norme de L^2).

(12) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que si on pose $\mathcal{F}(f) := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-i)^k \lambda_k(f) \tilde{h}_k$, ceci définit le prolongement à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ de la transformation de Fourier définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.