UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 4 - POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, APPLICATIONS

PASCAL J. THOMAS

6. Polynôme caractéristique

Dans tout ce qui suit, u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, de dimension finie. Les polynômes sont toujours supposés à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note χ_u le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice A.

6.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes). On écrit $\chi_A(X) = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$. Soit Q un polynôme quelconque ; montrer que

$$\chi_{Q(A)}(X) = \prod_{j=1}^n (X - Q(\lambda_j)).$$

Indication : traiter d'abord le cas où A est triangulaire supérieure.

6.2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice $M \in M_{2n}(\mathbb{C})$ donnée par l'expression en blocs:

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Indication : calculer le polynôme caractéristique de M pour montrer que toute valeur propre de M est une valeur propre de A.

6.3. On considère un polynôme $P(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$. On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

où il faut comprendre qu'il y a des zéros dans tous les emplacements vides (sans pointillés).

a) Soit u_P l'endomorphisme qui admet pour matrice C_P dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. En montrant et en utilisant le fait que pour tout $k \leq n-1$, la famille $\{e_1, u(e_1), \dots, u^k(e_1)\}$ est libre, montrer que P est le polynôme minimal de u_P. En déduire le polynôme caractéristique de u_P.

b) Calculer directement le polynôme caractéristique de C_P comme un déterminant.

c) Étant donnés $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, $x \neq 0$, on appelle *polynôme minimal local en* x de u le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $P(u)(x) = 0$. On le note $\mu_{u,x}$. On montre (comme pour le polynôme minimal μ_u de u) que l'ensemble des polynômes tels que $P(u)(x) = 0$ est un idéal engendré par $\mu_{u,x}$.

Montrer que $\mu_{u,x}$ divise μ_u.

Si $\operatorname{pgcd}(\mu_{u,x}, \mu_{u,y}) = 1$, montrer que $\mu_{u,x+y} = \mu_{u,x}\mu_{u,y}$.

d) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on écrit $\mu_u = Q_1^{m_1} \cdots Q_k^{m_k}$, où les Q_j sont des polynômes unitaires irréductibles de degré non nul, premiers entre eux (quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela se réduit à des polynômes de la forme $X - \lambda_j$, avec des λ_j distincts).

On rappelle que $E = \bigoplus_{j=1}^k \ker Q_j^{m_j}(u)$. Montrer que pour tout j, il existe $v_j \in \ker Q_j^{m_j}(u) \setminus \ker Q_j^{m_j-1}(u)$ (indication : exploiter la minimalité de μ_u).

Montrer que si $x := v_1 + \cdots + v_k$, alors $\mu_{u,x} = \mu_u$.

e) On suppose que $\mu_u = \chi_u$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$ soit une base de E. (On dit que le vecteur x est *cyclique* pour u). Montrer que dans cette base, la matrice de u est la matrice compagnon de P_u.

7. Application : exponentielle de matrices

Ce qui suit est un petit résumé de cours, avec 4 exercices dedans (vers la fin).

7.1. **Topologie sur les matrices.** Nous aurons besoin de prendre des limites de matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Dans ce but, nous allons définir une norme sur ces matrices. Pour un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$\|x\|^2 := \sum_{j=1}^n |x_j|^2.$$

On remarque que $\max_j |x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_j |x_j|$.

Définition 7.1. Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| := \sup \{\|Mx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

On remarque que si $M = (m_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$, $\|M\| \geq \max_{1 \leq j,k \leq n} |m_{jk}|$,

$$\|M\| \leq \sqrt{n} \sup \left\{ \max_j \left| \sum_k m_{jk} x_k \right| : \|x\| = 1 \right\} \leq \sqrt{n} \max_j \sum_k |m_{jk}| \leq n^{3/2} \max_{1 \leq j,k \leq n} |m_{jk}|.$$

Ces inégalités ne sont pas les meilleures, mais elle suffisent pour montrer que si on a une suite de matrices $M^{(m)}$, alors $\lim_m M^{(m)} = M$ si et seulement si pour chaque couple (j,k), $\lim_m m_{jk}^{(m)} = m_{jk}$ (avec les notations évidentes).

La définition 7.1 a une conséquence importante.

Lemme 7.2. Pour toutes $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.

Démonstration. Soit x tel que $\|x\| \leq 1$. Alors $\|Nx\| \leq \|N\|$, donc $\|MNx\| = \|N\| M \left(\frac{1}{\|N\|} Nx \right) \leq \|N\| \|M\|$. □

En particulier, $\|M^m\| \leq \|M\|^m$ pour tout $m \geq 0$, et si $\lim_m M^{(m)} = M$, alors $\lim_m NM^{(m)} = NM$ (et l'énoncé similaire en échangeant l'ordre du produit).

7.2. **Exponentielle de matrices.**

Définition 7.3. Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$e^M = \exp M := \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j.$$

Il faut montrer que cette suite de sommes partielles converge. Cela suit du fait que pour $k \le m$,

$$\left\| \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right\| \le \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{j!} \|M\|^j,$$

qui peut être rendu arbitrairement petit pour k assez grand car la série numérique $\sum \frac{1}{j!} t^j$ est absolument convergente pour tout $t \ge 0$ (ici on prend $t = \|M\|$). Donc on a une suite de Cauchy de matrices, donc chaque entrée est une suite de Cauchy complexe, donc convergente, donc la suite de matrices converge aussi.

L'application exponentielle sur les matrices a deux propriétés essentielles.

Proposition 7.4. Si $P \in M_n(\mathbb{C})$ est inversible, alors $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}(\exp M)P$.

Démonstration. Remarquez que $(P^{-1}MP)^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}M^2P$. On montre facilement de la même façon, par récurrence, que $(P^{-1}MP)^j = P^{-1}M^jP$ pour tout j. Donc pour tout m

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} (P^{-1}MP)^j = P^{-1} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right) P.$$

En passant à la limite en m des deux côtés, on trouve le résultat. □

Proposition 7.5. Si $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, et $MN = NM$, alors $\exp(M+N) = \exp M \exp N = \exp N \exp M$.

Démonstration. La démonstration repose sur les mêmes identités algébriques que dans le cas d'exponentielles de nombres (réels ou complexes). En détail :

$$\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right) \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} N^j \right) = \sum_{0\le j,k\le m} \frac{M^k N^j}{k!j!}$$

$$= \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{s} \frac{M^k N^{s-k}}{k!(s-k)!} + \sum_{0\le j,k\le m; j+k\ge m+1} \frac{M^k N^j}{k!j!}.$$

Ici nous utilisons la commutativité, pour avoir la formule du binôme :

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{s} \frac{M^k N^{s-k}}{k!(s-k)!} + \sum_{0\le j,k\le m; j+k\ge m+1} \frac{M^k N^j}{k!j!} = \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} (M+N)^s + R(m, M, N).$$

Mais on peut majorer la norme du reste :

$$\|R(m, M, N)\| \le \sum_{m+1\le j+k\le 2m} \frac{\|M\|^k \|N\|^j}{k!j!} = \sum_{m+1\le s\le 2m} \frac{1}{s!} (\|M\| + \|N\|)^s \to 0 \text{ quand } m \to \infty.$$

Finalement, en passant à la limite en m dans

$$\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j\right) \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} N^j\right) = \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} (M+N)^s + R(m,M,N),$$

on trouve la formule voulue. □

Attention, l'hypothèse de commutativité est indispensable.

7.1. Exercice : calculer e^M, e^N et e^{M+N} quand

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indications : il faudra utiliser le fait que M et N sont nilpotentes, et que $(M+N)^2 = I$.

7.3. **Calcul d'exponentielles de matrices.** On utilise les propriétés ci-dessus et la décomposition dite de Dunford.

Etant donnée une matrice M, on peut trouver P inversible, D diagonale et N nilpotente telles que $P^{-1}MP = D + N$, et $DN = ND$. Il s'en suit que $\exp(D+N) = e^D(I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1})$, où m est l'ordre de nilpotence de N. Le terme e^D se calcule aisément en prenant l'exponentielle de tous les termes diagonaux. Enfin, $e^M = P(\exp(D+N))P^{-1}$.

7.4. **Application aux systèmes d'équations différentielles.**

Nous commençons par le cas des équations homogènes.

Soit $U :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application différentiable, que l'on écrit comme un vecteur colonne

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Théorème 7.6. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $0 \in]a,b[$. Toutes les solutions du système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants $U'(t) = MU(t)$ sont données par $U(t) = e^{tM}U(0)$.*

Nous omettons la démonstration, qui est formellement très semblable à celle du cas scalaire.

7.2. Exercice : Traiter le cas $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3. Exercice : Equation différentielle (scalaire) linéaire à coefficients constants, d'ordre n, $u^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} = 0$.

On pose alors $u_1 := u$, et en général $u_j := u^{(j-1)}$, $1 \leq j \leq n$.

Poser le système en écrivant u_j' en fonction des u_k, pour $1 \leq j \leq n$. La matrice sera la transposée d'une matrice compagnon. Retrouver la théorie classique du polynôme caractéristique de l'équation. Montrer que les valeurs propres multiples correspondent à des solutions “résonnantes”.

Traiter le cas $u'' - 2u' + u = 0$.

7.4. Exercice : Appliquer cette méthode au système d'équation décrivant deux oscillateurs harmoniques couplés :

$$\begin{aligned} u_1'' &= -ku_1 + k_0(u_2 - u_1) \\ u_2'' &= -ku_2 - k_0(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

(Vous devrez arriver à une matrice 4×4).

Le cas des équations avec second membre se traite par la méthode dite de variation de la constante, brièvement : si $U'(t) = MU(t) + G(t)$, où G est une fonction donnée à valeurs vectorielles, c'est équivalent à $(e^{-tM}U(t))' = e^{-tM}G(t)$. Si on peut trouver une primitive du membre de droite, on obtient une solution particulière de l'équation.