UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
ANALYSE HILBERTIENNE, 2015-16, TD 4
MULTIPLICATION, INVERSION, RÉGULARISATION

1. Formule de multiplication

1.1. Nous voulons donner une démonstration complète (sans faire appel à un théorème admis sur les intégrales en deux variables) de la formule de multiplication

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

On suppose que f et g sont continues et bornées, et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$; et que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que dans ce cas la théorie des intégrales multiples nous dit que pour tout $A > 0$,

$$J(A) := \int_{-A}^{A} f(x) \int_{-A}^{A} e^{-2\pi ixy} g(y)dy\, dx = \int_{-A}^{A} g(y) \int_{-A}^{A} e^{-2\pi ixy} f(x)dx\, dy.$$

Rappeler pourquoi l'intégrale (en x) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy \right) dx$ est absolument convergente. On note I_1 sa valeur.
Montrer que

$$I_1 - J(A) = \int_{|x|>A} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy \right) dx + \int_{-A}^{A} f(x) \left(\int_{|y|\geq A} e^{-2\pi ixy} g(y)dy \right) dx.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε tel que si $A \geq A_\varepsilon$, alors $|I_1 - J(A)| \leq \varepsilon$.
Montrer que $I_1 = I_2$, où $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(x)dx \right) dy$.

2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

2.1. Soit f une fonction bornée, continue par morceaux, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge. Soit g une fonction indéfiniment dérivable à support borné (c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que si $|x| \geq A$, alors $g(x) = 0$). Montrer que $f * g$ est indéfiniment dérivable.

2.2. Les fonctions indéfiniment dérivables usuelles (polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, fonctions trigonométriques) ne sont pas à support borné.

Le but de cet exercice est de construire une fonction indéfiniment dérivable à support borné.

(1) Soit $g(x) := e^{-1/x^2}$ pour $x > 0$, $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrer par récurrence qu'il existe des polynômes P_n tels que pour $x > 0$, $g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ (indication pour les calculs : dériver $\frac{P_n(x)}{x^{3n}}$ comme le produit $P_n(x)x^{-3n}$ plutôt que comme un quotient).

(2) Montrer par récurrence que $g^{(n-1)}$ est dérivable en 0 et que $g^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que la fonction $\alpha(x) := g(1-x)g(x+1)$ est indéfiniment dérivable, à support borné.

Soit $M := \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx$, on pose $\rho(x) := \frac{1}{M}\alpha(x)$ et pour tout $\delta > 0$, $\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta}\rho(\frac{x}{\delta})$. Montrer que ρ_δ est une identité approchée.

(4) En déduire que toute fonction uniformément continue bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables.

3. Une application de la formule d'inversion

Nous allons calculer la transformée de Fourier du Noyau de Poisson du demi-plan, et en déduire une formule qui a des applications.

3.1. On pose, pour tout $\delta > 0$,

$$P_\delta(x) := \frac{1}{\pi\delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + x^2}.$$

Notez que P est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $e(x) := e^{-|x|}$, on rappelle que $\hat{e}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$.

(1) Trouver la valeur de $\delta > 0$ telle que $\hat{e}(\xi) = P_\delta(\xi)$.

(2) En déduire de quelle fonction $P_1(\xi)$ est la transformée de Fourier, puis grâce à la formule d'inversion, la valeur de $\hat{P}_1(\xi)$.

(3) Calculer $\hat{P}_\delta(\xi)$ pour un $\delta > 0$ quelconque.

(4) En utilisant la formule qui donne la transformée de Fourier d'un produit de convolution, calculer $\mathcal{F}(P_{\delta_1} * P_{\delta_2})$ pour $\delta_1, \delta_2 > 0$. En déduire la valeur de $P_{\delta_1} * P_{\delta_2}(x)$.