UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
TD 4 - PROJECTIONS, BASES HILBERTIENNES

PASCAL J. THOMAS

1. Projection orthogonale

Soit E un espace vectoriel à coefficients complexes, avec un produit intérieur noté $\langle x, y\rangle$. La norme euclidienne est donnée par $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$. Nous rappelons quelques définitions.

Rappels.
Si $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^\perp := \{x \in E : \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

On montre que $A^\perp$ est toujours un espace vectoriel (même si A est un ensemble quelconque). Si E est de dimension finie, $(A^\perp)^\perp$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par A.

On dit qu'un ensemble A est *fermé* si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède une limite x (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$), alors $x \in A$.

Plus généralement, on appelle *adhérence* de A, et on note $\overline{A}$ l'ensemble de toutes les limites de suites convergentes contenues dans A. C'est un ensemble fermé qui contient A (en fait, c'est le plus petit possible).

On dit qu'un ensemble A est *dense* dans E si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède pour limite x. Autrement dit, $\overline{A} = E$.

1.1. Pour tout $A \subset E$, montrer que $A^\perp$ est fermé (indication : Cauchy-Schwarz).

1.2. On suppose que A est dense dans E. Montrer que $A^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $A^\perp \neq \{0\}$, montrer en considérant un vecteur v de norme 1 tel que $v \in A^\perp$ (pourquoi peut-on en trouver ?) que $\overline{A} \neq E$.

Plus généralement, si A est un sous-espace vectoriel, on montre que $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$.

1.3. On considère $E := \mathcal{C}[-1, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$. On appelle W le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que W est fermé.

Montrer que $W^\perp = \{f \in E : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$.

Soit $f \in E$. Quelle est la projection de f sur W ? Sur $W^\perp$?

1.4. Dans le même espace E, on pose $V := \{f \in E : f(0) = 0\}$. Soit $g(x) = 1$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

Montrer que $g \notin E$, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in E$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. En déduire qu'il n'existe pas de projection de g sur V, et que V n'est pas fermé.

1.5. On considère E l'espace des fonctions continues à support borné dans $\mathbb{R}$, muni du produit intérieur $\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$. . Montrer que le sous-espace $F :=$

$\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f$ à support borné$\}$ est dense dans E pour la norme associée à $\langle f, g\rangle$ et aussi pour la norme uniforme $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Indication : utiliser les exercices 3.2 et 2.1 (3) de la Feuille 3 de TD.

De nombreux autres résultats de densité de ce type s'obtiennent par les mêmes méthodes.

1.6. Il existe d'autres normes que les normes euclidiennes. Leurs propriétés de projection ne sont pas aussi bonnes. On va montrer que même quand le sous-espace est fermé, la projection peut ne pas exister. C'est un peu plus compliqué que les exercices précédents.

On prend $E := \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(0) = 0\}$, muni de la norme uniforme, $\|f\|_\infty := \max_{[0,1]} |f|$. On pose $V := \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, et $g(t) = t$.

Montrer que V est fermé au sens de la norme uniforme et que $g \notin V$.

Soit $\beta > 0$. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(x) := \max(-\alpha x, x - \frac{1}{2} - \beta)$. Montrer (en utilisant par exemple le théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe une valeur $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ telle que $f_{\alpha(\beta),\beta} \in V$. On posera $f_\beta := f_{\alpha(\beta),\beta}$.

Montrer que $\|g - f_\beta\|_\infty = \frac{1}{2} + \beta$, et donc que $\inf_{f\in V} \|g - f\|_\infty = \frac{1}{2}$.

On va montrer que cette borne inférieure n'est jamais atteinte. On rappelle l'inégalité des accroissements finis : si $h \in \mathcal{C}^1[0,1]$, alors $|h(1) - h(0)| \le \max_{[0,1]} |h'|$, avec égalité si et seulement si h est une fonction affine (c'est-à-dire que h' est constante).

Soit $f \in V$. On pose $h(x) := \int_0^x g(t) - f(t)dt$. Est-ce une fonction affine ? Calculer $h(1) - h(0)$ et en déduire que $\|g - f\|_\infty > \frac{1}{2}$.

2. Bases hilbertiennes

2.1. On se place dans E un espace de Hilbert (toute suite de Cauchy est convergente).

Soit $S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé. Soit $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ une suite de coefficients telle que $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

Montrer que $\sum_n c_n x_n := \lim_n \sum_{k=0}^n c_k x_k$ est bien défini comme élément de E.

On suppose pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \ge N$ tel que $c_n \ne 0$. Montrer que $\sum_n c_n x_n$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs x_n (une base hilbertienne infinie n'est pas une base au sens habituel).

2.2. Soit $S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé. Soit $V_n = \{\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k, \lambda_k \in \mathbb{C}, 0 \le k \le n\}$.

(1) Montrer que $V_n \subset V_{n+1}$ et donner $\dim V_n$ (question facile !)
(2) Montrer que l'espace vectoriel engendré par S est égal à $\bigcup_n V_n$ (question facultative, et pas difficile).
(3) Soit $f \in E$. Montrer que la projection (orthogonale) de f sur V_n est donnée par
$$\sum_{k=0}^n \langle f, x_k\rangle x_k.$$
On appelle ceci la meilleure approximation de f par des éléments de V_n (pourquoi ?).

(4) Si S est une base hilbertienne, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=0}^{n}\langle f, x_k\rangle x_k \right\| = 0.$$

2.3. On prend désormais comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$, muni du produit intérieur

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

On considère l'ensemble de vecteurs $S := \{x \mapsto e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que S est un système orthonormé (vous le savez déjà depuis le cours d'analyse de Fourier).

(2) On pose $V_n := \{x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{ikx}, \lambda_k \in \mathbb{C}, -n \le k \le n\}$. Soit $S_n(f)$ la projection d'une fonction f sur V_n. Reconnaissez-vous cet objet ?

Montrer qu'on peut trouver une fonction D_n (noyau de Dirichlet) telle que

$$S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ (sans calculs !) mais qu'on n'obtient pas une identité approchée, car la fonction n'est pas positive.

C'est un fait (difficile) qu'il existe des fonctions continues g telles que $S_n(g)(x)$ ne tende pas vers $g(x)$ en tout point. Donc pas d'espoir de convergence uniforme.

Nous allons montrer une convergence plus faible, mais quand même intéressante.

(3) Pour montrer que S est une base hilbertienne, il reste à voir la densité de l'espace vectoriel engendré.

Montrer que $h_n(t) := c_n \cos^{2n}\frac{t}{2}$, avec c_n choisie telle que $\int_{-\pi}^{\pi} h_n(x)dx = 1$, est une identité approchée

En utilisant l'expression du cosinus par les exponentielles complexes, montrer que $h_n \in V_n$ et calculer c_n.

Montrer que pour t fixé, $x \mapsto h_n(x-t)$ est dans V_n (les coefficients dépendent de t).

Pour f continue, on pose $f_n := f * h_n$. Montrer que $f_n \in V_n$. On a donc trouvé une suite (f_n) avec $f_n \in V_n$ qui tend vers f uniformément sur $[-\pi,\pi]$.

En déduire que $|f_n - f|^2$ tend vers 0 uniformément sur $[-\pi,\pi]$. Puis déduire que $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$, puis que $\lim_{n\to\infty}\|S_n(f) - f\| = 0$.

2.4. On se place désormais dans $H := L^2(-\pi,\pi)$. On rappelle que quand f et g sont dans cet espace, dont l'existence est admise, $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ ont un sens (qui correspond au sens habituel quand f et g sont par exemple bornées et continues par morceaux, ou dès qu'on peut définir ces intégrales au sens des intégrales généralisées) ; qu'il contient l'ensemble des fonctions continues comme un sous-espace dense ; mais qu'on assimile toute fonction f telle que $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx = 0$ à la fonction nulle. Par exemple, deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points seront considérées comme égales.

On peut montrer (pour les courageux) que la densité des fonctions continues dans H et l'exercice 2.3 impliquent que pour tout $f \in H$, $\lim_{n\to\infty}\|S_n(f) - f\| = 0$.

Nous nous limiterons à étudier un exemple intéressant.

(1) Montrez, comme une conséquence des exercices 2.1 et 2.3 que la fonction définie par
$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \cos(jx)$$
est dans H, alors que la série n'est pas absolument convergente.

(2) (Plus dur !) Montrez que pour $x \neq 0$, la série converge.

Nous allons procéder ainsi : on pose $A_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \cos(jx)$. Montrer que $|A_n(x)| \leq n$. Montrer que
$$A_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} - 1.$$
Indication : $A_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{ijx}\right)$.

En déduire que $|A_n(x)| \leq \frac{C}{|x|}$, pour une certaine constante C.

Maintenant, on procède à la transformation d'Abel : montrer que
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cos(jx) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) A_j(x) + \frac{1}{n} A_n(x),$$
et en déduire la convergence de la série.

(3) (Subtil) Déduire des calculs ci-dessus que $|f(x)| \leq C_1 + C_2 \ln |x|$, pour $x \neq 0$. Méthode : déduire de la question précédente que
$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) A_j(x).$$
Puis, étant donné $x \neq 0$, choisir n tel que $n \leq |x|^{-1} \leq n + 1$, et majorer la somme ci-dessus en traitant séparément $\sum_{j=1}^{n}$ et $\sum_{j=n+1}^{\infty}$ avec les deux majorations possibles pour $A_n(x)$.