

**UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
TD 4 - PROJECTIONS, BASES HILBERTIENNES, POLYNÔMES
ORTHOGONAUX**

PASCAL J. THOMAS

1. PROJECTION ORTHOGONALE

Nous nous plaçons toujours dans un espace vectoriel E à coefficients complexes, muni d'un produit intérieur noté $\langle x, y \rangle$. La norme (euclidienne) est donnée par $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$.

Définition 1.1. Si $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A l'ensemble $A^\perp := \{x \in E : \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$.

On montre facilement que A^\perp est toujours un espace vectoriel. Si E est de dimension finie, $(A^\perp)^\perp$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par A .

Définition 1.2. On dit qu'un ensemble A est *fermé* si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède une limite x (c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$), alors $x \in A$.

On dit qu'un ensemble A est *dense* dans E si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède pour limite x .

Evidemment le seul ensemble à la fois fermé et dense est E lui-même.

1.1. On suppose que A est dense dans E . Montrer que $A^\perp = \{0\}$.

1.2. On considère $E := \mathcal{C}[-1, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}dx$. Soit $V := \{f \in E : f(0) = 0\}$. Soit $g(x) = 1$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

Montrer que $g \notin V$, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in V$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. En déduire qu'il n'existe pas de projection de g sur V , et que V n'est pas fermé.

1.3. Dans le même espace E , on appelle W le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que W est fermé.

Montrer que $W^\perp = \{f \in E : \int_{-1}^1 f(x)dx = 0\}$. Montrer que W^\perp est fermé (indication : Cauchy-Schwarz).

Soit $f \in E$. Quelle est la projection de f sur W ? Sur W^\perp ?

1.4. Il existe d'autres normes que les normes euclidiennes. Leurs propriétés de projection ne sont pas aussi bonnes.

(a) Dans \mathbb{R}^2 , on pose $\|(x_1, x_2)\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|)$. On pose $V := \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$, et $P := (0, 1)$.

Trouver tous les points $(t, 0)$ tels que $\|P - (t, 0)\|_\infty = \min\{\|P - Q\|_\infty, Q \in V\}$ (il n'y a pas d'unicité de la projection).

(b) Cet exemple est plus compliqué. On va montrer que même quand le sous-espace est fermé, la projection peut ne pas exister.

On prend $E := \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(0) = 0\}$, muni de la norme uniforme, $\|f\|_\infty := \max_{[0,1]} |f|$. On pose $V := \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, et $g(t) = t$.

Montrer que V est fermé au sens de la norme uniforme et que $g \notin V$.

Soit $\beta > 0$. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(x) := \max(-\alpha x, x - \frac{1}{2} - \beta)$. Montrer (en utilisant par exemple le théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe une valeur $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ telle que $f_{\alpha(\beta),\beta} \in V$. On posera $f_\beta := f_{\alpha(\beta),\beta}$.

Montrer que $\|g - f_\beta\|_\infty = \frac{1}{2} + \beta$, et donc que $\inf_{f \in V} \|g - f\|_\infty = \frac{1}{2}$.

On va montrer que cette borne inférieure n'est jamais atteinte. On rappelle l'inégalité des accroissements finis : si $h \in \mathcal{C}^1[0, 1]$, alors $|h(1) - h(0)| \leq \max_{[0,1]} |h'|$, avec égalité si et seulement si h est une fonction affine (c'est-à-dire que h' est constante).

Soit $f \in V$. On pose $h(x) := \int_0^x g(t) - f(t)dt$. Est-ce une fonction affine ? Calculer $h(1) - h(0)$ et en déduire que $\|g - f\|_\infty > \frac{1}{2}$.

2. BASES HILBERTIENNES

2.1. On se place dans E un espace de Hilbert (toute suite de Cauchy est convergente).

Soit $S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé. Soit $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ une suite de coefficients telle que $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

Montrer que $\sum_n c_n x_n := \lim_n \sum_{k=0}^n c_k x_k$ est bien défini comme élément de E .

On suppose pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $c_n \neq 0$. Montrer que $\sum_n c_n x_n$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs x_n (une base hilbertienne infinie n'est pas une base au sens habituel).

2.2. Soit $S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé. Soit $V_n = \{\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k, \lambda_k \in \mathbb{C}, 0 \leq k \leq n\}$.

- (1) Montrer que $V_n \subset V_{n+1}$ et donner $\dim V_n$ (question facile !)
- (2) Montrer que l'espace vectoriel engendré par S est égal à $\bigcup_n V_n$ (question facultative, et pas difficile).
- (3) Soit $f \in E$. Montrer que la projection (orthogonale) de f sur V_n est donnée par

$$\sum_{k=0}^n \langle f, x_k \rangle x_k.$$

On appelle ceci la meilleure approximation de f par des éléments de V_n (pourquoi ?).

- (4) Si S est une base hilbertienne, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, x_k \rangle x_k \right\| = 0.$$

2.3. On prend désormais comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, muni du produit intérieur

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On considère l'ensemble de vecteurs $S := \{x \mapsto e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$.

- (1) Montrer que S est un système orthonormé (vous le savez déjà depuis le cours d'analyse de Fourier).

(2) On pose $V_n := \{x \mapsto \sum_{k=-n}^n \lambda_k e^{ikx}, \lambda_k \in \mathbb{C}, -n \leq k \leq n\}$. Comment appelle-t-on la projection d'une fonction f sur V_n ?

(3) Pour montrer que S est une base hilbertienne, il reste à voir la densité de l'espace vectoriel engendré.

Montrer que $h_n(t) := c_n \cos^{2n} \frac{t}{2}$, avec c_n choisie telle que $\int_{-\pi}^{\pi} h_n(x) dx = 1$, est une identité approchée

En utilisant l'expression du cosinus par les exponentielles complexes, montrer que $h_n \in V_n$ et calculer c_n .

Montrer que pour t fixé, $x \mapsto h_n(x-t)$ est dans V_n (les coefficients dépendent de t).

Montrer que $f_n := f * h_n \in V_n$. On a donc trouvé une suite (f_n) avec $f_n \in V_n$ qui tend vers f uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Montrer que cela implique que $|f_n - f|^2$ tend vers 0 uniformément sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

3. POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Nous rappelons brièvement le *procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt* : étant donné un système libre $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, qui peut être fini ou infini, on pose V_n pour l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \dots, x_n\}$. On cherche un système orthonormé $\tilde{S} = \{y_1, y_2, \dots\}$ tel que l'espace vectoriel engendré par $\{y_1, \dots, y_n\}$ soit égal à V_n , pour tout n .

Une façon d'obtenir un tel système est de choisir, pour chaque n , l'unique vecteur z_n qui soit orthogonal à V_{n-1} et tel que $z_n = x_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k$. Pourquoi ce vecteur est-il unique ? (indication : si z'_n était un autre vecteur avec les mêmes propriétés, $z_n - z'_n \in V_{n-1}$.) Pourquoi cela donne-t-il un système orthogonal tel que l'espace vectoriel engendré par $\{z_1, \dots, z_n\}$ soit égal à V_n , pour tout n ?

Appelons $\pi_n(v)$ la projection orthogonale de v sur V_n .

3.1. Un moyen de trouver des z_n comme ci-dessus est d'écrire $z_n = x_n - \pi_n(x_n)$ (le démontrer). On pose alors $y_n := \frac{1}{\|z_n\|} z_n$.

Montrer qu'on peut construire récursivement les y_n en posant $z_n := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, y_k \rangle y_k$.

3.2. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

On considère $S := \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Calculer les trois premières fonctions du système orthonormal obtenu par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. C'est un exemple de ce qu'on appelle *polynômes orthogonaux*.

Théorème 3.1. *Théorème d'approximation de Weierstrass. Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est la limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Une démonstration de ce théorème est donnée dans votre devoir maison 2, mais il en existe beaucoup d'autres.

3.3. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$. Voici un exemple de famille de polynômes

orthogonaux, connue sous le nom de *polynômes de Legendre* :

$$f_n(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n ((1-x^2)^n), \quad n \geq 0.$$

- (1) Montrer que f_n est un polynôme de degré n .
- (2) Montrer que $\int_{-1}^1 f_n(x) dx = 0$ pour $n \geq 1$.
- (3) Si $n > m \geq 1$, montrer que $\int_{-1}^1 f_n(x) f_m(x) dx = 0$. Indication : intégrer par parties en dérivant $m+1$ fois f_m .

3.4. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit intérieur

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Nous allons donner un autre exemple de famille de polynômes orthogonaux, connue sous le nom de *polynômes de Tchebycheff* (Chebyshev en translittération anglaise).

- (1) Montrer qu'on a bien un produit intérieur (en particulier, pourquoi l'intégrale converge-t-elle ?)
- (2) En faisant le changement de variable $x = \cos \theta$, montrer que

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\pi f(\cos \theta) \overline{g(\cos \theta)} d\theta.$$

- (3) On définit la fonction T_n sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta \in [0, \pi]$. Donner T_0, T_1, T_2 . Démontrer par récurrence que T_n coïncide avec une fonction polynomiale de degré n . (On pourra utiliser les formules d'additions des rapports trigonométriques, et le fait que $\sin \theta \sin((n-1)\theta) = \cos \theta \cos((n-1)\theta) - \cos(n\theta)$).

On peut aussi faire une démonstration directe en représentant les fonctions trigonométriques à l'aide d'exponentielles complexes.

- (4) Montrer le système $S := \{T_0, T_1, \dots, T_n, \dots\}$ est orthogonal.
- (5) Une autre façon de construire les polynômes de Tchebycheff est d'utiliser la formule de Rodrigues. On pose

$$\tilde{T}_n(x) := \sqrt{1-x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right), \quad n \geq 0.$$

Montrer que \tilde{T}_n est un polynôme de degré n .

- (6) Montrer que $\tilde{S} := \{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n, \dots\}$ est orthogonal, et en déduire qu'il existe des constantes c_n telles que $\tilde{T}_n = c_n T_n$.

Il existe une autre méthode pour trouver des bases hilbertiennes de l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ qui repose sur le calcul de fonctions propres pour une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 2, avec des conditions au bord bien choisies. On parle alors de *problème de Sturm-Liouville*. Les bases obtenues avec des sinus et des cosinus dans le cadre des séries de Fourier sont un cas particulier de cette méthode. Nous n'aurons pas le temps d'approfondir cette question.