UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 3 - EXEMPLES DE RÉDUCTIONS D'ENDOMORPHISMES

PASCAL J. THOMAS

4. Exemples de sous-espaces stables

4.1. On se donne f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, de dimension finie. A quelle condition une projection p (cf. Exercice 2.1, Feuille 1) vérifiera-t-elle $f \circ p = p \circ f$?

Indication : considérez les sous-espaces stables par f et par p.

4.2. a) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Im}(f - \lambda I)$ est un sous-espace stable pour f (I désigne l'application identité).

b) On suppose que $\mathrm{Im}(f - \lambda I) + \mathrm{Im}(f - \mu I) \subsetneqq E$. Montrer que $\lambda = \mu$.

Indication : considérer l'image de E par l'application $(f - \lambda I) - (f - \mu I)$.

4.3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n, muni d'une base $e_1, \ldots, e_n$. On rappelle qu'une *permutation* est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. On rappelle qu'un *cycle* d'une permutation σ est un ensemble $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(x_j) = x_{j+1}$, $1 \leq j \leq k-1$, et $\sigma(x_k) = x_1$. Toute permutation s'écrit comme un produit de composition de ses restrictions à ses cycles (nécessairement disjoints), qui commutent entre elles.

Si σ est une permutation, on définit $u_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ par $u(e_j) := e_{\sigma(j)}$.

a) Si A est un cycle de σ, montrer que $E_A := \mathrm{Vect}\{e_j, j \in A\}$ est un sous-espace stable de u_σ. Si a est le cardinal de A, trouver le polynôme minimal de $u|_{E_A}$.

b) Montrer que E est somme directe des E_A, où A parcourt tous les cycles possibles de σ.

c) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u_σ est diagonalisable.

d) Application : trouver le polynôme minimal et les valeurs propres de

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Exemples de réduction de matrices

5.1. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice (dans la base canonique):

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Quelles sont ses valeurs propres ? Quel est son polynôme minimal ?

b) En déduire un calcul rapide de A^{-1}, A^3, A^{-2} et A^{-3}.

c) Déterminer $\operatorname{Ker}(A-I)^2$ et trouver une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = v_2$, $Av_3 = v_3 + v_2$.

d) Déterminer les vecteurs x tels que $\{x, Ax, A^2x\}$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

5.2. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice (dans la base canonique):

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique $\det(XI - B)$ et les valeurs propres de B.

b) Montrer que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} B^2 \oplus \operatorname{Ker}(B - I)^2$.

c) Les endomorphismes induits par B sur $\operatorname{Ker} B^2$ et par $B - I$ sur $\operatorname{Ker}(B - I)^2$ sont nilpotents. Déterminer leur ordre de nilpotence. Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle l'endomorphisme représenté par B dans la base canonique soit représenté par une matrice en forme réduite de Jordan.

5.3. On considère N la matrice $n \times n$ sur $\mathbb{K}$ donnée par $N = (n_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ avec $n_{j,j+1} = 1$ pour $1 \leq j \leq n-1$, $n_{jk} = 0$ si $k - j \neq 1$.

a) Quel est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme représenté par N dans la base canonique ?

b) Montrer qu'on ne peut pas trouver de matrice $n \times n$ A telle que $A^2 = N$ (indication : montrer que A sera nilpotente et considérer son ordre).

c) Trouver toutes les matrices A à coefficients réels telles que

$$A^2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$