UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL, 2015-16 TD 3 - PRODUIT DE CONVOLUTION

PASCAL J. THOMAS

On rappelle la définition du produit de convolution : si g est une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx$ converge, et si f est une fonctions bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on pose

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

On vérifie que cette intégrale est bien absolument convergente pour toute valeur donnée de x, car on a la majoration $|f(x-t)g(t)| \leq M_f|g(t)|$.

1. Régularité

1.1.
(1) On pose $f_1(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$ (fonction porte). Soit g une fonction bornée, continue par morceaux, mais qui peut avoir des discontinuités. Montrer que $f_1 * g(x)$ est bien définie.
(2) Exemple : calculer $f_1 * f_1$.
(3) Montrer que pour tout g comme dans la première question, $|f_1 * g(x+h) - f_1 * g(x)| \leq 2M_g|h|$, et donc que la fonction $f_1 * g$ est (uniformément) continue (notez bien que peut-être ni f_1 ni g ne sont continues).
(4) Pour $\delta > 0$, on pose $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta} f_1(\frac{x}{\delta})$. Tracer le graphe de f_δ et vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta(x)dx = 1$.
Si g est continue au point x, montrer que $\lim_{\delta\to 0} f_\delta * g(x) = g(x)$.
(5) Si g est continue (partout), montrer que $f_1 * g$ est dérivable (partout) et calculer sa dérivée.

1.2. Soit $h(x) := (1-|x|)\chi_{[-1,+1]}(x)$. Calculer $\hat{h}$. Cette fonction est-elle absolument intégrable ? Et que peut-on dire de $\xi\hat{h}(\xi)$? Comparer $\hat{h}$ à la transformée de Fourier du f_1 de l'exercice 1.1.

2. Inclusions, estimations

Notation : quand les intégrales concernées convergent, on va écrire pour $p > 0$,

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

2.1.
(1) Montrer que si f est une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. telle que l'intégrale $\int |f| := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge), et si g est une fonction bornée, alors pour tout x, $|f * g(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|\right) \sup_{\mathbb{R}} |g|$.
On peut écrire ceci $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(2) Si f et g sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $f*g$ l'est aussi et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f*g(x)|dx \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx\right).$$
On peut écrire ceci $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$.

(3) On veut maintenant étudier le cas où f^2 et g sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (f n'étant pas nécessairement intégrable). On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable aussi pour les intégrales impropres :
$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \le \left(\int |f|^2\right)\left(\int |g|^2\right).$$
Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux fonctions judicieusement choisies, que si g est absolument intégrable, bornée, si f est bornée, et si f^2 est absolument intégrable, alors pour tout x fixé,
$$\left|\int f(x-t)g(t)dt\right|^2 \le \left(\int |f(x-t)|^2|g(t)|dt\right)\left(\int |g(t)|dt\right)$$
(toutes les intégrales sont prises sur la droite réelle).

En déduire que
$$\int |f*g(x)|^2dx \le \left(\int |f(x)|^2dx\right)\left(\int |g(t)|dt\right)^2.$$
On peut écrire ceci $\|f*g\|_2 \le \|f\|_2\|g\|_1$, ou, si on échange les rôles de f et g, $\|f*g\|_2 \le \|f\|_1\|g\|_2$.

2.2. (1) Montrer que si g est une fonction bornée, continue par morceaux, et si f est bornée et à *support borné,* c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout x tel que $|x| \ge A$, alors $f(x) = 0$, alors la fonction $f*g$ est uniformément continue.

(2) Montrer que si f est bornée et absolument intégrable, alors on a toujours le même résultat : la fonction $f*g$ est uniformément continue.

Méthode : étant donné $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que $|h| \le \delta$ implique $|f*g(x+h) - f*g(x)| \le \varepsilon$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Décomposer $f = f_A + \tilde{f}_A$, avec $f_A(x) := f(x)\chi_{[-A,+A]}(x)$. En utilisant éventuellement l'exercice 2.1 (1), choisir A pour que $\tilde{f}_A * g(y)$ soit petit pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}$, puis utiliser la continuité de $f_A * g$ obtenue par la question précédente.

2.3. On suppose que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On va montrer que $f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Pourquoi $f*g$ est-elle indéfiniment dérivable ?

(2) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $A_m > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x^m g(x-y)| \le A_m(1+|y|)^m$. On considérera séparément les cas $|x| \le 2|y|$ et $|x| \ge 2|y|$. Dans ce dernier cas, on remarquera que $|x-y| \ge \frac{1}{2}|x|$.

(3) En déduire que $x^m f*g(x)$ est une fonction bornée pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(4) Expliquer pourquoi on peut utiliser la question précédente pour montrer que $x^m \frac{d^k}{dx^k}(f*g)(x)$ est une fonction bornée pour tous $m, k \in \mathbb{N}$.