UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL ANALYSE HILBERTIENNE, 2014-15, TD 3 INTÉGRALES EN DEUX VARIABLES, PRODUIT DE CONVOLUTION, RÉGULARISATION

1. Formule de multiplication

1.1. Nous voulons donner une démonstration complète (sans faire appel à un théorème admis sur les intégrales en deux variables) de la formule de multiplication

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

On suppose que f et g sont continues et bornées, et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$; et que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que dans ce cas la théorie des intégrales multiples nous dit que pour tout $A > 0$,

$$J(A) := \int_{-A}^{A} f(x) \int_{-A}^{A} e^{-2\pi ixy} g(y)dy\, dx = \int_{-A}^{A} g(y) \int_{-A}^{A} e^{-2\pi ixy} f(x)dx\, dy.$$

Rappeler pourquoi l'intégrale (en x) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy\right) dx$ est absolument convergente. On note I_1 sa valeur.
Montrer que

$$I_1 - J(A) = \int_{|x|>A} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy\right) dx + \int_{-A}^{A} f(x) \left(\int_{|y|\le A} e^{-2\pi ixy} g(y)dy\right) dx.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε tel que si $A \ge A_\varepsilon$, alors $|I_1 - J(A)| \le \varepsilon$.
Montrer que $I_1 = I_2$, où $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(x)dx\right) dy$.

2. Propriétés du produit de convolution

Notation : quand les intégrales concernées convergent, on va écrire pour $p > 0$,

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

2.1. (1) Montrer que si f est une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. telle que l'intégrale $\int |f| := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge), et si g est une fonction bornée, alors pour tout x, $|f * g(x)| \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|\right) \sup_{\mathbb{R}} |g|$.

On peut écrire ceci $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(2) Si f et g sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ l'est aussi et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)|dx \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx\right).$$

On peut écrire ceci $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(3) On veut maintenant étudier le cas où f^2 et g sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (f n'étant pas nécessairement intégrable). On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable aussi pour les intégrales impropres :

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left(\int |f|^2 \right) \left(\int |g|^2 \right).$$

Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux fonctions judicieusement choisies, que si g est absolument intégrable, bornée, si f est bornée, et si f^2 est absolument intégrable, alors pour tout x fixé,

$$\left| \int f(x-t)g(t)dt \right|^2 \leq \left(\int |f(x-t)|^2 |g(t)| dt \right) \left(\int |g(t)| dt \right)$$

(toutes les intégrales sont prises sur la droite réelle).

En déduire que

$$\int |f * g(x)|^2 dx \leq \left(\int |f(x)|^2 dx \right) \left(\int |g(t)| dt \right)^2.$$

On peut écrire ceci $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1$, ou, si on échange les rôles de f et g, $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

2.2. (1) Montrer que si g est une fonction bornée, continue par morceaux, et si f est bornée et à *support borné*, c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout x tel que $|x| \geq A$, alors $f(x) = 0$, alors la fonction $f * g$ est uniformément continue.

(2) Montrer que si f est bornée et absolument intégrable, alors on a toujours le même résultat : la fonction $f * g$ est uniformément continue.

Méthode : étant donné $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que $|h| \leq \delta$ implique $|f * g(x+h) - f * g(x)| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Décomposer $f = f_A + \tilde{f}_A$, avec $f_A(x) := f(x)\chi_{[-A,+A]}(x)$. En utilisant éventuellement l'exercice 2.1 (1), choisir A pour que $\tilde{f}_A * g(y)$ soit petit pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}$, puis utiliser la continuité de $f_A * g$ obtenue par la question précédente.

2.3. On suppose que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On va montrer que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Pourquoi $f * g$ est-elle indéfiniment dérivable ?

(2) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $A_m > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x^m g(x-y)| \leq A_m (1 + |y|)^m$. On considérera séparément les cas $|x| \leq 2|y|$ et $|x| \geq 2|y|$. Dans ce dernier cas, on remarquera que $|x - y| \geq |y|$.

(3) En déduire que $x^m f * g(x)$ est une fonction bornée pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(4) Expliquer pourquoi on peut utiliser la question précédente pour montrer que $x^m \frac{d^k}{dx^k} (f * g)(x)$ est une fonction bornée pour tous $m, k \in \mathbb{N}$.

3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

3.1. Soit f une fonction bornée, continue par morceaux, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge. Soit g une fonction indéfiniment dérivable à support borné (cf. la définition dans l'exercice 2.2). Montrer que $f * g$ est indéfiniment dérivable.

3.2. Les fonctions indéfiniment dérivables usuelles (polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, fonctions trigonométriques) ne sont pas à support borné.

Le but de cet exercice est de construire une fonction indéfiniment dérivable à support borné.

(1) Soit $g(x) := e^{-1/x^2}$ pour $x > 0$, $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$.
Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrer par récurrence qu'il existe des polynômes P_n tels que pour $x > 0$, $g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ (indication pour les calculs : dériver $\frac{P_n(x)}{x^{3n}}$ comme le produit $P_n(x)x^{-3n}$ plutôt que comme un quotient).

(2) Montrer par récurrence que $g^{(n-1)}$ est dérivable en 0 et que $g^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que la fonction $\alpha(x) := g(1-x)g(x+1)$ est indéfiniment dérivable, à support borné.
Soit $M := \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx$, on pose $\rho(x) := \frac{1}{M}\alpha(x)$ et pour tout $\delta > 0$, $\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta}\rho(\frac{x}{\delta})$. Montrer que ρ_δ est une identité approchée.

(4) En déduire que toute fonction uniformément continue bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables.