UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL ANALYSE HILBERTIENNE, 2013-14, TD 3

1. Régularité

1.1. (1) On pose $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$ (fonction porte). Soit g une fonction bornée, continue par morceaux, mais qui peut avoir des discontinuités. Montrer que $f_0 * g(x)$ est bien définie.

(2) Montrer que $|f_0 * g(x+h) - f_0 * g(x)| \leq 2M_g|h|$, et donc que la fonction $f_0 * g$ est uniformément continue (notez bien que peut-être ni f_0 ni g ne sont continues).

1.2. (1) Si f est une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. telle que l'intégrale $\int |f| := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge), et si g est une fonction bornée, alors pour tout x, $|f * g(x)| \leq \left(\int |f|\right) \sup_{\mathbb{R}} |g|$.

(2) Si f et g sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ l'est aussi et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)|dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx\right).$$

(3) On veut maintenant étudier le cas où f^2 et g sont des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (f n'étant pas nécessairement intégrable). On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable aussi pour les intégrales impropres :

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int |f|^2\right)\left(\int |g|^2\right).$$

Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux fonctions judicieusement choisies, que si g est absolument intégrable, bornée, et si f^2 est absolument intégrable, alors pour tout x fixé,

$$\left|\int f(x-t)g(t)dt\right|^2 \leq \left(\int |f(x-t)|^2|g(t)|dt\right)\left(\int |g(t)|dt\right)$$

(toutes les intégrales sont prises sur la droite réelle).

En déduire que

$$\int |f * g(x)|^2 dx \leq \left(\int |f(x)|^2 dx\right)\left(\int |g(t)|dt\right)^2.$$

1.3. (1) Montrer que si g est une fonction bornée comme dans l'exercice 1.1, et si f est bornée et à *support borné,* c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout x tel que $|x| \geq A$, alors $f(x) = 0$, alors la fonction $f * g$ est uniformément continue.

(2) Montrer que si f est bornée et absolument intégrable, alors on a toujours le même résultat : la fonction $f * g$ est uniformément continue.

Méthode : étant donné $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que $|h| \leq \delta$ implique $|f * g(x+h) - f * g(x)| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Décomposer $f = f_A + \tilde{f}_A$, avec $f_A(x) := f(x)\chi_{[-A,+A]}(x)$. En utilisant éventuellement l'exercice 1.2 (1), choisir A pour que $\tilde{f}_A * g(y)$ soit petit pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}$, puis utiliser la continuité de $f_A * g$ obtenue par la question précédente.

(3) Etendre le résultat précédent au cas où f est absolument intégrable et peut tendre vers l'infini au voisinage d'un point a, par exemple. La méthode doit toujours être la même : étant donné $\varepsilon > 0$, trouver une fonction f_1 bornée, à support borné, telle que $\int |f - f_1| < \varepsilon_1$ (bien choisi) et appliquer l'exercice 1.2 (1) pour montrer que $|(f - f_1) * g(x + h) - (f - f_1) * g(x)| \leq \varepsilon/2$. Puis appliquer la question (1) pour avoir la même estimation pour f_1.

1.4. On suppose que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On va montrer que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Pourquoi $f * g$ est-elle indéfiniment dérivable ?
(2) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $A_m > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x^m g(x - y)| \leq A_m(1 + |y|)^m$. On considérera séparément les cas $|x| \leq 2|y|$ et $|x| \geq 2|y|$. Dans ce dernier cas, on remarquera que $|x - y| \geq |y|$.
(3) En déduire que $x^m f * g(x)$ est une fonction bornée pour tout $m \in \mathbb{N}$.
(4) Expliquer pourquoi on peut utiliser la question précédente pour montrer que $x^m \frac{d^k}{dx^k}(f * g)(x)$ est une fonction bornée pour tous $m, k \in \mathbb{N}$.

2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

2.1. Soit f une fonction bornée, continue par morceaux, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge. Soit g une fonction indéfiniment dérivable à support borné (cf. la définition dans l'exercice 1.3). Montrer que $f * g$ est indéfiniment dérivable.

2.2. Les fonctions indéfiniment dérivables usuelles (polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, fonctions trigonométriques) ne sont pas à support borné.

Le but de cet exercice est de construire une fonction indéfiniment dérivable à support borné.

(1) Soit $g(x) := e^{-1/x^2}$ pour $x > 0$, $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrer par récurrence qu'il existe des polynômes P_n tels que pour $x > 0$, $g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ (indication pour les calculs : dériver $\frac{P_n(x)}{x^{3n}}$ comme le produit $P_n(x)x^{-3n}$ plutôt que comme un quotient).

(2) Montrer par récurrence que $g^{(n-1)}$ est dérivable en 0 et que $g^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
(3) Montrer que la fonction $\alpha(x) := g(1 - x)g(x + 1)$ est indéfiniment dérivable, à support borné.
(4) Soit $M := \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx$, on pose $\rho(x) := \frac{1}{M}\alpha(x)$ et pour tout $\delta > 0$, $\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta}\rho(\frac{x}{\delta})$.

Montrer que ρ_δ est une identité approchée.

(5) En déduire que toute fonction continue bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables.