UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 2 - POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

PASCAL J. THOMAS

3. Polynômes annulateurs, minimaux, etc

Dans tout ce qui suit, u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, de dimension finie. Les polynômes sont toujours supposés à coefficients dans $\mathbb{K}$.

3.1. a) On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $P(0) \neq 0$ et $P(u) = 0$. Montrer que u est inversible, et qu'on peut écrire son inverse sous la forme $Q(u)$, où Q est un polynôme.

b) On note μ_u le polynôme minimal de u. Montrer que si u est inversible, alors $\mu_u(0) \neq 0$. On pourra utiliser un théorème du cours, ou le fait, à démontrer, que si il existe un endomorphisme $v \neq 0$ tel que $uv = 0$, alors u n'est pas inversible.

c) Déduire de ce qui précède que si u est inversible, son inverse s'exprime comme un polynôme en u (les coefficients du polynôme dépendent de u).

3.2. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

3.3. Soit P un polynôme. Montrer que :
$P(u)$ est inversible si et seulement si $\operatorname{pgcd}(P, \mu_u) = 1$.

Indication : vous aurez besoin de l'identité de Bézout.

3.4. Soit S un sous-espace vectoriel stable de E tel que $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$. Alors $S = \operatorname{Im} u$.

3.5. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \operatorname{Ker} u^r \oplus \operatorname{Im} u^r$. Indication : vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice 3.2, ou celui de l'exercice 3.4.

3.6. Ici E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^p$.

3.7. Soient P et Q deux polynômes. On écrit $D := \operatorname{pgcd}(P, Q)$ and $M := \operatorname{ppcm}(P, Q)$. Notre but est de montrer que

$$\operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker} M(u).$$

a) Montrer que $\operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} M(u)$.

b) On note P_0, Q_0 les polynômes tels que $P = DP_0$, $Q = DQ_0$. Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} M(u)$, $P_0(u)(x) \in \operatorname{Ker} Q(u)$.

c) On suppose que $x \in \operatorname{Ker} M(u)$. En utilisant le fait que $\operatorname{pgcd}(P_0, Q_0) = 1$, montrer qu'il existe $y \in \operatorname{Ker} P(u)$, $z \in \operatorname{Ker} Q(u)$ tels que $x = y + z$.

3.8. On considère $\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{K}[X] : P(u) \text{ nilpotent}\}$.

a) Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal.

b) Montrer que $\mathcal{I}$ est engendré par $\tilde{\mu}_u$, qui est le produit des facteurs irréductibles distincts de μ_u (par ex., si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mu_u(X) = \prod_j (X - \lambda_j)^{\beta_j}$ et $\tilde{\mu}_u(X) = \prod_j (X - \lambda_j)$).