UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL, 2015-16 TD 2 - CALCULS DE TRANSFORMÉES DE FOURIER, RÉGULARITÉ, ESPACE DE SCHWARTZ

PASCAL J. THOMAS

On rappelle la définition de la *Transformée de Fourier* d'une fonction f, quand f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt.$$

1. Soit $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$
(c'est la fonction "porte" : $f(x) = 1$ si $-1/2 \leq x \leq 1/2$, et 0 sinon).
Calculer $\hat{f}_0$. Cette fonction est-elle absolument intégrable sur $\mathbb{R}$?
Montrer que si g est une fonction en escalier, alors $\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

2. Soit f une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. On suppose de plus que f est paire, à valeurs réelles. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ qui est, a priori, un nombre complexe, est en fait réel. (Rappel : si $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$).
Si f est à valeurs complexes, trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ pour tout ξ.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ dès que $|x| \geq A$ (on dit que f est *à support compact*). Montrer en intégrant par parties que $\lim_{\xi\to+\infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

4. Soit $f(x) := (1 - x^2)^3 \chi_{[-1,+1]}(x)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
Montrer, sans la calculer, que $\hat{f}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

5. On pose $f(x) := e^{-|x|}$. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a + ib)e^{(a+ib)x}$.
   (1) Montrer que $x^k f(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (2) Montrer par récurrence la propriété générale suivante
   (P_n) : *Si $x^k g(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour $0 \leq k \leq n$, alors $(\hat{g})^{(n)}$ existe et est obtenue en prenant la transformée de Fourier de $x \mapsto (-2\pi i x)^n g(x)$.*
   (3) Montrer sans la calculer que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   (4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x\xi} dx$, en déduire le calcul de $\hat{f}(\xi)$.

6. Quelques rappels et variations sur les intégrales généralisées.
(a) Montrer que si $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^0 f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ existe, et donner sa valeur.
(b) Réciproquement, si $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ existe, on ne peut rien dire sur la convergence des intégrales de f sur $[0, +\infty[$ et $] - \infty, 0]$.

Le montrer en utilisant l'exemple $f(x) := \frac{1+x}{1+x^2}$.

(c) Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, et si $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$ existe, alors montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{0} f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, et si $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$ existe, alors montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{0} f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$.

(e) Ce résultat est plus difficile (inspiré par la théorie des intégrales singulières).

Si f est une fonction telle que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ et si de plus la fonction définie par $g(x) = f(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de l'origine, montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$ existe.

Indication : appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 à la fonction g. En déduire une expression de $f(x)$.

7. Nous allons étudier quelque chose qui ressemble à la transformée de Fourier d'une fonction non absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.

Montrer que $\lim_{A\to+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$ existe, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (indication : intégration par parties).

On note cette limite $F(\xi)$. Montrer que $F(\xi) \in i\mathbb{R}$, et que $\lim_{\xi\to\infty} F(\xi) = 0$.

Que peut-on dire de $\lim_{\xi\to 0} F(\xi)$?

8. Montrer que les deux espaces de fonctions suivants sont égaux à l'espace de Schwartz

(1) $\mathcal{S}_0 := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n,k \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x) = 0 \right\}$;

(2) $\mathcal{S}_1 := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n,k \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \right.$
$\left. \text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f^{(k)}(x)| \text{ converge.} \right\}$.