UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL, 2014-15 TD 2 - CALCULS DE TRANSFORMÉES DE FOURIER, CONVOLUTION, ESPACE DE SCHWARTZ

PASCAL J. THOMAS

1. Transformation de Fourier, espace de Schwartz

1.1. Soit f une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. On suppose de plus que f est paire, à valeurs réelles. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ qui est, a priori, un nombre complexe, est en fait réel. (Rappel : si $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$).

Si f est à valeurs complexes, quelle condition impliquera que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ pour tout ξ ?

1.2. Soit $f(x) := (1 - x^2)^3 \chi_{[-1,+1]}(x)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Montrer, sans la calculer, que $\hat{f}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.3. On pose $f(x) := e^{-|x|}$. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}$.

(1) Montrer que $x^k f(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(2) Montrer par récurrence la propriété générale suivante
  (P_n) : *Si $x^k g(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour $0 \le k \le n$, alors $(\hat{g})^{(n)}$ existe et est obtenue en prenant la transformée de Fourier de $x \mapsto (-2\pi i x)^n g(x)$.*
(3) Montrer sans la calculer que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
(4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx$, en déduire le calcul de $\hat{f}(\xi)$.

1.4. Montrer que les deux espaces de fonctions suivants sont égaux à l'espace de Schwartz

(1) $\mathcal{S}_0 := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x) = 0 \right\}$;
(2) $\mathcal{S}_1 := \Big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$
  et $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f^{(k)}(x)|$ converge. $\Big\}$.

2. Produit de convolution

On rappelle la définition du produit de convolution : si g est une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx$ converge, et si f est une fonctions bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M_f > 0$ tel que $|f(x)| \le M_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on pose

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

On vérifie que cette intégrale est bien absolument convergente pour toute valeur donnée de x, car on a la majoration $|f(x-t)g(t)| \le M_f |g(t)|$.

2.1. (1) On pose $f_1(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$ (fonction porte). Soit g une fonction bornée, continue par morceaux, mais qui peut avoir des discontinuités. Montrer que $f_1 * g(x)$ est bien définie.

(2) Exemple : calculer $f_1 * f_1$.

(3) Montrer que pour tout g comme dans la première question, $|f_1 * g(x+h) - f_1 * g(x)| \leq 2M_g|h|$, et donc que la fonction $f_1 * g$ est (uniformément) continue (notez bien que peut-être ni f_1 ni g ne sont continues).

(4) Pour $\delta > 0$, on pose $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta} f_1(\frac{x}{\delta})$. Tracer le graphe de f_δ et vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta(x)dx = 1$.

Si g est continue au point x, montrer que $\lim_{\delta \to 0} f_\delta * g(x) = g(x)$.

(5) Si g est continue (partout), montrer que $f_1 * g$ est dérivable (partout) et calculer sa dérivée.

2.2. Soit $h(x) := (1 - |x|)\chi_{[-1,+1]}(x)$.

Calculer $\hat{h}$. Cette fonction est-elle absolument intégrable ? Et que peut-on dire de $\xi \hat{h}(\xi)$?

Comparer $\hat{h}$ à la transformée de Fourier de f_1. Pouvez-vous formuler une conjecture ?