UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL, 2013-14 TD 2 - CALCULS DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

PASCAL J. THOMAS

1. Exemples

1.1. Soit $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$
(c'est la fonction "porte" : $f(x) = 1$ si $-1/2 \leq x \leq 1/2$, et 0 sinon).

Calculer $\hat{f}_0$. Cette fonction est-elle absolument intégrable sur $\mathbb{R}$?

1.2. Soit $f(x) := (1-x^2)^3\chi_{[-1,+1]}(x)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Montrer, sans la calculer, que $\hat{f}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.3. Soit $f(x) := (1-x^2)\chi_{[-1,+1]}(x)$. Montrer, sans la calculer, que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Calculer $\hat{f}$.

1.4. On pose $f(x) := e^{-|x|}$. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}e^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}$.

(1) Montrer que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer par récurrence la propriété générale suivante
    (P_n) : *Si $x^k g(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour $0 \leq k \leq n$, alors $(\hat{g})^{(n)}$ existe et est obtenue en prenant la transformée de Fourier de $x \mapsto (-2\pi ix)^n g(x)$.*
(3) Montrer sans la calculer que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
(4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2\pi ix\xi}dx$, en déduire $\hat{f}(\xi)$.

1.5. Soit $f_1(x) := (1-|x|)\chi_{[-1,+1]}(x)$.

Calculer $\hat{f}_1$. Cette fonction est-elle absolument intégrable ? Et que peut-on dire de $\xi\hat{f}(\xi)$?

Soient f et g deux fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx$ convergent.

On rappelle que $f * g$ désigne le produit de convolution de deux fonctions, et qu'il est donné par la formule

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Calculer $f_0 * f_0$, où f_0 est la fonction définie dans l'exercice 1.1. Calculer sa transformée de Fourier. Pouvez-vous formuler une conjecture ?

2. Propriétés

2.1. Soit f une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. On suppose de plus que f est paire, à valeurs réelles. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ qui est, a priori, un nombre complexe, est en fait réel. (Rappel : si $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$).

Si f est à valeurs complexes, quelle condition impliquera que $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ pour tout ξ ?

2.2. Montrer que les deux espaces de fonctions suivants sont égaux à l'espace de Schwartz

(1) $\mathcal{S}_0 := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x) = 0 \right\}$;

(2) $\mathcal{S}_1 := \Big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(k)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f^{(k)}(x)|$ converge. $\Big\}$.