UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 1 - ENDOMORPHISMES NILPOTENTS ET PROJECTIONS

PASCAL J. THOMAS

1. Autour des endomorphismes nilpotents

On rappelle que u^k désigne les puissances de composition, $u^2 = u \circ u$, $u^k = u \circ \cdots \circ u$ (k fois).

1.1. Soit $E = \mathbb{C}_n[Z]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\dim E = n+1$. On considère l'endomorphisme u de E donné par $u(P) = P'$ (le polynôme dérivé).

a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

b) Déterminer les valeurs propres de u.

c) Montrer que si $n \geq 1$, u n'est pas diagonalisable.

d) Trouver une base $(e_j)_{0 \leq j \leq n}$ de E telle que $u(e_j) = e_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq n$ et $u(e_0) = 0$.

1.2. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Nous appellerons *drapeau* une suite finie de sous-espaces vectoriels E_j de E tels que $\dim E_j = j$ et $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$.

a) Montrer qu'il existe une base $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de E telle que $e_j \in E_j$. Cette base est-elle unique ? (Vous pouvez commencer avec $E = \mathbb{R}^2$ pour vous faire une idée).

b) Soit u un endomorphisme de E tel que $u(E_j) \subset E_j$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice $M(u)$ de u dans cette base soit triangulaire supérieure.

c) Soit u un endomorphisme de E tel que $u(E_j) \subset E_{j-1}$, $j \geq 1$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice $M(u)$ de u dans cette base soit triangulaire supérieure stricte (avec des 0 sur la diagonale).

d) Montrer que dans le cas de la question c), $u^n = 0$.

1.3. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$, $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

b) On suppose que u est *nilpotent,* c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Montrer que la seule valeur propre de u est 0.

c) Dans le cas où $E = \mathbb{C}^n$, nous allons montrer la réciproque de la question b). Supposons donc que $\operatorname{Sp} u = \{0\}$ (le spectre de u est réduit à 0). Montrer que u n'est pas surjective. Plus généralement, si on pose $E_j := \operatorname{Im} u^j$, montrer que si $\dim E_j > 0$, alors $\operatorname{Sp}(u|_{E_j}) = \{0\}$.

d) Sous l'hypothèse de la question c), en considérant la suite $(\dim E_j)_j$, montrer qu'il existe j tel que $E_j = \{0\}$.

e) Sous l'hypothèse de la question c), montrer qu'il existe une base de E telle que dans cette base, u ait une matrice triangulaire supérieure stricte.

2. Projections et autres exemples

2.1. Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension quelconque. On suppose que $u^2 = u$. On dit dans ce cas que u est une *projection.*

a) Montrer que les valeurs propres possibles de u sont 0 ou 1.

b) Montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme somme de deux vecteurs propres (ou est déjà propre lui-même). Indication : montrer que $x - u(x) \in \operatorname{Ker} u$.

c) Conclure que u est diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base constituée de vecteurs propres). Si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim \operatorname{Im} u = r$ (rang de u), donner une forme diagonale possible de la matrice de u (dans une base appropriée).

2.2. Soit $E = \mathbb{C}^n$ et u, v deux endomorphismes de E. On rappelle que le *polynôme caractéristique* de u est donné par $\det(XI_n - u) =: P_u(X)$, où I_n est l'application identité sur E, et X l'indéterminée. On rappelle aussi que les racines de P_u sont exactement les valeurs propres de u, et que $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, P_u est scindé et

$$P_u(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de u.

a) On suppose que $\operatorname{Sp} u \cap \operatorname{Sp} v = \emptyset$. On rappelle qu'on peut appliquer un polynôme à un endomorphisme en remplaçant 1 par I_n, et en général X^k par u^k.

Montrer que $P_v(u)$ est un endomorphisme inversible.

b) Soit $\operatorname{End} E$ l'ensemble des endomorphismes de E (c'est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais cet isomorphisme n'est pas unique). On considère l'endomorphisme de $\operatorname{End} E$ donné par $\varphi(w) := uw - wv$. Montrer que si $w \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors pour tout polynôme Q, $Q(u)w = wQ(v)$.

c) On rappelle que $P_v(v) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton). Montrer que φ est injective et donc surjective.

d) Le cas où $u = v$ est bien entendu très différent. Étudier $\operatorname{Ker} \varphi$ dans les cas où $n = 2$ et $u = v$ admet les matrices suivantes dans la base canonique :

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$