UNIVERSITÉ PAUL SABATIER — 2014-2015
L2 PARCOURS SPÉCIAL
ANALYSE HILBERTIENNE, TD 1

PASCAL J. THOMAS

1. Exponentielle complexe, séries

1.1. A partir de la définition de l'exponentielle complexe, montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z| \leq e^{|z|} \text{ et } \left|\frac{e^z - 1}{z}\right| \leq e^{|z|}.$$

1.2. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Calculer en termes de fonctions trigonométriques ou trigonométriques hyperboliques de $2x$ et $2y$ la quantité $|\sin(x+iy)|^2$.

Pour quelles valeurs de y la fonction $x \mapsto \sin(x+iy)$ est-elle bornée ?

2. Séries de Fourier

On rappelle que $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

2.1. (a) Si $f \in \mathcal{C}^1(]0,2\pi[)$, montrer que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

(b) Montrer que le même résultat est vrai si f est une fonction en escalier (c'est-à-dire qu'il existe une partition de $]0,2\pi[$ en un nombre fini d'intervalles telle que f soit constante sur chacun de ces intervalles).

(c) On rappelle que si f est intégrable au sens de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ telles que $f_\varepsilon \leq f \leq g_\varepsilon$ et $\int_0^{2\pi} |f_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t)|dt < \varepsilon$. Montrer que si f est intégrable au sens de Riemann, alors $|c_n(f)| \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|dt$, puis que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

3. Intégrales généralisées

3.1. (a) Montrer que si $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^0 f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ existe, et donner sa valeur.

(b) Réciproquement, si $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ existe, on ne peut rien dire sur la convergence des intégrales de f sur $[0,+\infty[$ et $]-\infty, 0]$.

Le montrer en utilisant l'exemple $f(x) := \frac{1+x}{1+x^2}$.

(c) Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, et si $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ existe, alors montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^0 f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, et si $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$ existe, alors montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^0 f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$.

(e) Ce résultat est plus difficile (inspiré par la théorie des intégrales singulières).

Si f est une fonction telle que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ et si de plus la fonction définie par $g(x) = f(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de l'origine, montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$ existe.

Indication : appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 à la fonction g. En déduire une expression de $f(x)$.

3.2. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A > 0$ et une fonction f_ε tels que $f_\varepsilon(x) = 0$ dès que $|x| \geq A$, et $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$.

4. Transformée de Fourier

On rappelle la définition de la *Transformée de Fourier* d'une fonction f, quand f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

4.1. Soit $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$
(c'est la fonction “porte” : $f(x) = 1$ si $-1/2 \leq x \leq 1/2$, et 0 sinon).

Calculer $\hat{f}_0$. Cette fonction est-elle absolument intégrable sur $\mathbb{R}$?

4.2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ dès que $|x| \geq A$ (on dit que f est *à support compact*). Montrer en intégrant par parties que $\lim_{\xi\to+\infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

4.3. Nous allons étudier quelque chose qui ressemble à la transformée de Fourier d'une fonction non absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $\lim_{A\to+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$ existe, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (indication : intégration par parties).

On note cette limite $F(\xi)$. Montrer que $F(\xi) \in i\mathbb{R}$, et que $\lim_{\xi\to\infty} F(\xi) = 0$.

Que peut-on dire de $\lim_{\xi\to 0} F(\xi)$?