UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL ANALYSE HILBERTIENNE, TD 1

PASCAL J. THOMAS

1. Exponentielle complexe, séries

1.1. A partir de la définition de l'exponentielle complexe, montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z| \leq e^{|z|} \text{ et } \left|\frac{e^z - 1}{z}\right| \leq e^{|z|}.$$

1.2. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Calculer en termes de fonctions trigonométriques ou trigonométriques hyperboliques de $2x$ et $2y$ la quantité $|\sin(x+iy)|^2$.

Pour quelles valeurs de y la fonction $x \mapsto \sin(x+iy)$ est-elle bornée ?

1.3. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente, $\sum b_n$ une série convergente. On pose $c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$.

On écrira $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^n c_k$. On pose aussi $A := \lim_{n\to\infty} A_n$, $B := \lim_{n\to\infty} B_n$ (qui existent par hypothèse).

(a) Montrer que $C_n - AB = \sum_{k=0}^n a_{n-k}(B_k - B) + (A_n - A)B$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer qu'on peut choisir $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq M$,

$$|B_k - B| \leq \frac{\varepsilon}{1 + 3\sum_0^\infty |a_j|}.$$

(c) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\sum_{k=0}^{M} a_{n-k}(B_k - B)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } n \geq N_1,$$

et conclure que $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$: c'est un théorème plus général sur le produit de Cauchy.

2. Intégrales généralisées

2.1. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur la droite réelle, telles que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f'$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g'$ soient absolument convergentes.

(a) Montrer que f et g admettent des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f'g$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} fg'$ sont absolument convergentes et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)dx = \lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} g(x) - \lim_{x\to-\infty} f(x) \lim_{x\to-\infty} g(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx.$$

Cela nous permet d'intégrer par parties sur un intervalle non borné.

2.2. (a) Montrer que si $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^0 f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)dx$ existe, et donner sa valeur.

(b) Réciproquement, si $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)dx$ existe, on ne peut rien dire sur la convergence des intégrales de f sur $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$.

Le montrer en utilisant l'exemple $f(x) := \frac{1+x}{1+x^2}$.

(c) Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, et si $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)dx$ existe, alors montrer que $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = I_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^0 f(x)dx = I_2 \in \mathbb{R}$.

2.3. Si $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$, montrer que la limite suivante existe et est finie:

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x} dx.$$

Indication : considérer $f - f(0)$.

L'intégrale ici considérée n'est pas toujours convergente. On appelle ce genre de limite la *valeur principale* de l'intégrale (divergente).

2.4. Nous avons vu en cours que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, en la décomposant en $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ (sur cet intervalle, la fonction est bornée) et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ qui s'intègre par parties en posant $u := \frac{1}{t}$, $v' := \sin t$, $u' = \frac{1}{t^2}$, $v = -\cos t$.

(a) Soit, pour $x > 0$,

$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

Montrer que l'intégrale qui définit g est convergente (et même absolument convergente). Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(b) Vérifier qu'on peut calculer la dérivée $g'(x)$ en dérivant "sous l'intégrale". La calculer. En déduire la valeur de $g(x)$ pour $x > 0$.

(c) Cette dernière question est plus délicate. On veut montrer que $\lim_{x\to 0,x>0} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, et donc trouver la valeur explicite de l'intégrale.

Montrer d'abord que $-e^{-xt}\frac{\cos t + x\sin t}{1+x^2}$ est une primitive de $e^{-xt}\sin t$. En déduire une expression de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ en intégrant par parties.

Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}(1 - e^{-xt}) dt = \int_1^{+\infty} f(x,t) \frac{1}{t^2} dt,$$

où $f(x,t)$ est une fonction qui vérifie $|f(x,t)| \leq 2$, et pour tout $A > 0$ $\sup_{0\leq t\leq A} f(x,t) \to 0$ quand $x \to 0$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, choisir $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \varepsilon/2$ (pourquoi peut-on ?), et achever la démonstration.

(d) Application : en utilisant l'exercice 2.3 et un changement de variable, calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{it\xi}}{t} dt \text{ (pour } \xi \in \mathbb{R}^*).$$

2.5. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ dès que $|x| \geq A$ (on dit que f est *à support compact*). Montrer en intégrant par parties que $\lim_{\xi\to+\infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.