UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
TD 7 - PRODUIT SCALAIRE, FORMES HERMITIENNES, ENDORMORPHISMES NORMAUX...

PASCAL J. THOMAS

12. Produit scalaire et normes

On considère un espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire (ou hermitien selon les cas) noté $(\cdot,\cdot)$. On note $\|x\|^2 = (x,x)$.

12.1. Montrer que si u est une application de E dans E qui préserve le produit scalaire, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in E$, $(u(x), u(y)) = (x, y)$, alors u est linéaire, et donc u est dans le groupe orthogonal de E.

Indications : montrer que l'image d'une base orthonormée est orthornormée. Puis exprimer x et $u(x)$ dans ces bases respectives.

12.2. Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après quel théorème sait-on qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et une matrice orthogonale $P \in O(3,\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$?

Trouver explicitement de telles matrices.

12.3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la quadrique d'équation $(x+y)(y-z)+3x-5y = 0$. Trouver son centre de symétrie et ses axes principaux, en donner une équation dans des coordonnées rectangulaires adaptées et déterminer sa nature.

12.4. a) Soit p une projection, c'est-à-dire $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$. Montrer que p est une projection orthogonale, c'est-à-dire telle que $p = p^*$, si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

b) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $pq = qp$;
(2) p et q admettent une base commune de diagonalisation;
(3) pq est une projection.

Indication : pour montrer que (3) implique (1), commencer par montrer que pq est une projection orthogonale.

12.5. On veut calculer $\inf_{a\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(1 + \sum_{j=1}^n a_j t^j\right)^2 dt$.

a) On rappelle que sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $(P,Q) := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire.

Montrer que le problème posé équivaut à calculer la projection du polynôme constant 1 sur le sous-espace des polynômes qui s'annulent en 0, et donc à trouver un polynôme Q tel que $Q(0) = 0$ et $(Q, X^k) = (1, X^k)$ pour $1 \leq k \leq n$.

b) Résoudre le système linéaire obtenu à partir de la question a). Pour ce faire, on pourra remarquer que $\frac{1}{t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+t}$ est le développement en éléments simples d'une fraction rationnelle qui s'annule aux points $h \in \mathbb{N}$, $2 \leq h \leq n+1$.

12.6. On se place sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'une *norme* sur $\mathbb{R}^n$ est une application $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow R_+$ telle que $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, $N(tx) = |t|N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, et $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

D'après l'inégalité de Minkowski, la norme euclidienne $x \mapsto \|x\|$ est bien une norme en ce sens ! Mais il y en a d'autres, par exemple $N(x) := \max_j |x_j|$ définit une norme.

On rappelle que toute norme est une application continue pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

b) Nous allons montrer la réciproque : si N est une norme telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2\left(N(x)^2 + N(y)^2\right)$, alors il existe un produit scalaire φ tel que $N(x)^2 = \varphi(x,x)$.

Montrer que si φ est bilinéaire et symétrique et vérifie la relation ci-dessus, on doit avoir

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right).$$

c) Désormais, on prend φ définie par la formule ci-dessus. Montrer que φ est symétrique.

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x,y)$. Indication : écrire $2y = y+y$ et décomposer de façon appropriée $x+2y$ et $x-2y$...

d) Montrer que pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \varphi(x_1 + x_2, y)$.

e) En déduire successivement que $\varphi(tx, y) = t\varphi(x,y)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, puis pour tout $t \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $t \in \mathbb{Q}$.

f) Conclure en utilisant la continuité de la norme N.

13. Formes hermitiennes, Endomorphismes normaux

Dans cette section, E est toujours un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit hermitien (défini positif).

13.1. Soit la matrice de $\mathbb{C}^{3\times 3}$ donnée par

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après quel théorème sait-on qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ et une matrice unitaire $P \in U(3,\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$?

Trouver explicitement de telles matrices.

13.2. On prend $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien standard $(x,y) := \sum_j x_j \bar{y}_j$. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $A^* = -A$. Montrer que la matrice $\exp A$ est unitaire.

13.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est normal (c'est-à-dire que $uu^* = u^*u$) si et seulement si il existe un polynôme P (de degré inférieur ou égal à $n-1$) tel que $u^* = P(u)$.

Indication : pour montrer que la condition est nécessaire, utiliser l'interpolation de Lagrange : si $z_1, \dots, z_n$ sont des nombres complexes distincts, $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$, alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(z_j) = w_j$, $1 \le j \le n$.

13.4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{\mathbb{R}})$ (une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire), $u \neq 0$. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe $\lambda > 0$ telle que $\lambda u \in O^+(\mathbb{R}^2)$ (le groupe des transformations orthogonales directes, ou rotations), où $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne standard et u est considérée comme élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Que se passe-t-il dans le cas où u est anti-linéaire en tant qu'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$?

13.5. Remarquons que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Si on pose $\bar{x} := (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, on a $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{C}^n : \bar{x} = x\}$.

a) Montrer que toute base de $\mathbb{R}^n$ (pour sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est une base de $\mathbb{C}^n$ (pour sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel). En déduire que tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ s'étend de façon unique à $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ telle que $P_u(\lambda) = 0$. Montrer que $P_u(\bar{\lambda}) = 0$. Montrer que si on prend $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\tilde{u}(x) = \lambda x$, alors $x, \bar{x}$ sont indépendants, et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x, \bar{x}) \cap \mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par u, L_λ. Donner la matrice de $u|_{L_\lambda}$ dans la base $\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x$.

c) On suppose que P_u admet une décomposition en facteurs irréductibles réels tous distincts (aucun des facteurs n'est élevé à une puissance plus grande que 1). Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a une forme par blocs de taille 1×1, 2×1, 1×2 ou 2×2 où les seuls blocs non-nuls sont sur la diagonale.

13.6. Soit $u \in O^+(\mathbb{R}^3)$. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire standard (euclidien).

a) Montrer que u est un endomorphisme normal.

b) Montrer que u a au moins une valeur propre réelle.

c) Si u a plus d'une valeur propre réelle, montrer qu'elle en a 3 (comptées avec les multiplicités), montrer qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$ et donner les formes possibles de sa matrice dans une base de diagonalisation.

d) Si u n'a qu'une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes λ et $\bar{\lambda}$, montrer que $|\lambda| = 1$ et que la valeur propre réelle est 1.

Identifier l'action de u sur $L := \mathrm{Ker}(u_I d)$ (qu'on appelle axe de la rotation) et $L^\perp$. Donner l'angle de rotation en fonction de λ.

e) Application : vérifier que la matrice M ci-dessous définit une rotation et donner ses éléments géométriques (axe, angle).

$$M := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.7. On se place sur $\mathbb{C}^n$. Une *norme* sur $\mathbb{C}^n$ est une application $N : \mathbb{C}^n \longrightarrow R_+$ telle que $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, $N(tx) = |t| N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$, et $N(x+y) \le N(x) + N(y)$.

Montrer que $N(x)^2 = \psi(x,x)$ où ψ est une forme hermitienne si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$, $N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2\left(N(x)^2 + N(y)^2\right)$.

Indication : on définit la fonction φ comme dans l'exercice 12.6. On pose $\psi(x,y) := \frac{1}{2}\left(\varphi(x,y) + i\varphi(x,iy)\right)$. Il reste à montrer que ψ est hermitienne (mais la linéarité pour les coefficients réels est déjà acquise).