UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL : ANALYSE HILBERTIENNE, 2015-2016
DEVOIR MAISON 2 — À RENDRE LE 5 AVRIL 2016

PASCAL J. THOMAS

Problème 1

Nous voulons donner une démonstration complète (sans faire appel à un théorème admis sur les intégrales en deux variables) de la formule de multiplication

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

On suppose que f et g sont continues et bornées, et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$; et que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que dans ce cas la théorie des intégrales multiples (non généralisées) nous dit que pour tout $A > 0$,

$$J(A) := \int_{-A}^{A} f(x) \int_{-A}^{A} e^{-2\pi ixy} g(y)dy\, dx = \int_{-A}^{A} g(y) \int_{-A}^{A} e^{-2\pi ixy} f(x)dx\, dy.$$

1) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy$ est une intégrale absolument convergente et bornée indépendamment de x.

1) Rappeler pourquoi l'intégrale (en x) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy \right) dx$ est absolument convergente. On note I_1 sa valeur.

2) Montrer que

$$I_1 - J(A) = \int_{|x|>A} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} g(y)dy \right) dx + \int_{-A}^{A} f(x) \left(\int_{|y|\geq A} e^{-2\pi ixy} g(y)dy \right) dx.$$

3) Montrer, en étudiant séparément les deux termes ci-dessus, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε tel que si $A \geq A_\varepsilon$, alors $|I_1 - J(A)| \leq \varepsilon$.

4) Montrer que $I_1 = I_2$, où $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixy} f(x)dx \right) dy$.

Problème 2

1) Soit h une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier de h ne peut pas être la fonction identiquement égale à 1. (Indication : quel doit être le comportement de $\hat{h}(x)$ quand $|x| \to +\infty$?).

2) Soit $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction h absolument intégrable bornée sur $\mathbb{R}$ telle que $G * h = G$ (indication : prendre la transformée de Fourier).

En d'autres termes, il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution parmi les fonctions absolument intégrables. Les identités approchées sont des approximations d'un tel élément neutre. Les questions qui suivent tournent autour de cette idée.

3) Toujours pour $G(x) = e^{-\pi x^2}$, pour tout $\delta > 0$, on pose $g_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} G\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)$.
a) Montrer que $(g_\delta)_\delta$ est une identité approchée.
b) Montrer que $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} \widehat{g_\delta}(x) = 1$.

4) Désormais on suppose que $(K_\delta)_\delta$ est une identité approchée quelconque.
Montrer que $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} \widehat{K_\delta}(\xi) = 1$. Indication : $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = K_\delta * f_\xi(0)$, pour une certaine fonction f_ξ.

5) On suppose de plus que pour tout δ, K_δ est une fonction paire. Montrer que $\widehat{K_\delta}(\xi)$ est à valeurs réelles et que $-1 \le \widehat{K_\delta}(\xi) \le 1$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

6) Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (non nécessairement continue), telle que $|f|^2$ soit aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. On cherche à comparer $f * K_\delta$ et f. En utilisant la formule de Plancherel, donner une expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f * K_\delta(x) - f(x)|^2 \, dx$ sous la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 L_\delta(\xi) d\xi$, où L_δ dépend de $\widehat{K_\delta}$.

7) On rappelle le Théorème de Convergence Dominée : soit I un intervalle et $(g_\delta)_\delta$ une famille de fonctions intégrables sur I; si $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} g_\delta(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$ et qu'il existe h intégrable sur I telle que $|g_\delta(x)| \le h(x)$ pour tout $x \in I$ et $\delta > 0$, alors $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} \int_I g_\delta(x) dx = \int_I g(x) dx$.
Montrer que
$$\lim_{\delta\to 0, \delta>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f * K_\delta(x) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$