Université Paul Sabatier **L2 Parcours Spécial**

Analyse Hilbertienne (Pascal J. Thomas)

Devoir maison 2, à rendre le mardi 1er avril 2014

1. Théorème de Weierstrass

1.1. On pose $c_n := \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$. Montrer que $c_n \geq 1/(n+1)$.
Indication : $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$.

1.2. On pose $L_n(x) := \frac{(1-x^2)^n}{c_n}$ pour $|x| \leq 1$, $L_n(x) := 0$ pour $|x| \geq 1$. Montrer que (L_n) définit une identité approchée.
Attention : ici, il faut remplacer les $\varepsilon \to 0$ de la définition habituelle par $n \to \infty$. Mais on a les mêmes propriétés que celles qu'on a vues dans le cours.

1.3. On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $L_n * f$ converge uniformément vers f, et coïncide avec une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

1.4. Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a, b]$, est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.
Montrer le Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de (restrictions à $[a, b]$) de fonctions polynomiales.
Indication : prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a-1, b+1]$.

2. Polynômes de Hermite

Le but de cette section est de construire une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, composée de vecteurs propres pour la transformation de Fourier.
On pose
$$h_n(x) := e^{\pi x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(e^{-2\pi x^2}\right).$$

2.1. Montrer que
$$h_n(x) = h'_{n-1}(x) - 2\pi x h_{n-1}(x) \tag{1}$$
et qu'il existe un polynôme $H_n(x)$, de degré n, tel que $h_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$.
On appellera H_n *polynôme de Hermite* (vous noterez que ce n'est pas la normalisation habituelle pour les polynômes de Hermite, que l'on obtient en appliquant une dilatation de la variable x et en multipliant par une constante).

2.2. Montrer que h_n est paire (comme fonction) si et seulement si n est pair (comme nombre entier), et que h_n est impaire si et seulement si n est impair.

2.3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.4. En utilisant (1), montrer par récurrence que $\hat{h}_n(\xi) = (-i)^n h_n(\xi)$.

2.5. On pose $F_n(x) := e^{-\pi x^2} h_n(x)$. Montrer en intégrant par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k F_n(x) dx = 0 \text{ pour } 0 \leq k < n.$$

2.6. En déduire que pour $n \neq m$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) h_m(x) dx = 0$.

On pose $c_n := \int_{-\infty}^{+\infty} h_n^2(x) dx$. Montrer que $c_n > 0$.

2.7. On rappelle que l'espace $L^2(\mathbb{R})$ est muni d'une norme telle que pour toute (classe de) fonction f intégrable sur tout intervalle borné et de module carré intégrable, c'est-à-dire que $|f|^2$ est intégrable, $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$, et que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Quand f et g sont toutes les deux intégrables sur tout intervalle borné et de module carré intégrable, $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx$, ce qui a sens car $\left| f(x)\overline{g(x)} \right| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$. On garde cette notation pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

On admet que pour toute (classe de) fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P_ε tel que $\|f - e^{-\pi x^2} P_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

On pose $\tilde{h}_n := \frac{1}{\sqrt{c_n}} h_n$ et $\lambda_j(f) := \langle f, \tilde{h}_j \rangle$. Montrer que $\{\tilde{h}_0, \ldots, \tilde{h}_n\}$ forme une base orthonormée du sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$

$$\left\{ P(x) e^{-\pi x^2} : P \text{ polynôme de degré } \leq n \right\}.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k(f) \tilde{h}_k \right\| = 0$.

2.8. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f définie par la formule intégrale habituelle, est égale à $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n (-i)^k \lambda_k(f) \tilde{h}_k$ (la limite étant prise au sens de la norme de $L^2(\mathbb{R})$).

2.9. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. En admettant que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace complet, montrer que si on pose $\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n (-i)^k \lambda_k(f) \tilde{h}_k$, ceci définit un prolongement à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ de la transformation de Fourier définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pourquoi ce prolongement est-il le seul possible, quel que soit le moyen qu'on utilise pour l'obtenir ?