UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
ANALYSE HILBERTIENNE

PASCAL J. THOMAS

Solution Devoir maison 1 (lundi 14 mars 2016)

Problème 1

On pose $G(x) := e^{-\pi x^2}$ *(fonction gaussienne).*

1) Montrer que $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *en montrant par récurrence que* $G^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-\pi x^2}$*, où* P_k *est un polynôme de degré* $\leq k$*.*

La propriété est clairement vraie pour $k = 0$. Si on la suppose vraie pour k, alors

$$G^{(k+1)}(x) = e^{-\pi x^2}(P_k'(x) - 2\pi x P_k(x)),$$

qui a la forme requise au rang $k + 1$.

Par conséquent, pour tout $m, k \in \mathbb{N}$,

$$|x^m G^{(k)}(x)| = |x^m P_k(x)|e^{-\pi x^2} \leq C|x|^{m+k}e^{-\pi x^2} \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty.$$

Donc ces fonctions, étant continues, sont toutes bornées, cqfd.

(3 points)

2) On pose $F(\xi) := \hat{G}(\xi)$*. En dérivant sous l'intégrale, montrer que* $F'(\xi) = i\widehat{G'}(\xi)$*, et en utilisant un théorème du cours, montrer que* $F'(\xi) = -2\pi\xi F(\xi)$*.*

Comme $xG(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, la Proposition 1.2 (5) du polycopié donne

$$F'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x}(-2\pi i x)e^{-\pi x^2}dx.$$

Mais on remarque que cette intégrale vaut aussi, par la Proposition 1.2 (4),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ie^{-2\pi i\xi x}G'(x)dx = i \cdot (2\pi i\xi)\hat{G}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi),$$

puisque G' est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(4 points)

3) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$*.*

Résoudre l'équation différentielle satisfaite par F *et en déduire que* $\hat{G}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ *(autrement dit, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier).*

F satisfait une équation différentielle linéaire $F'(\xi) + b(\xi)F(\xi) = 0$, donc si on trouve une primitive B de b, les solutions s'écrivent toutes $Ce^{-B(\xi)}$, où C est une constante. Ici $b(\xi) = 2\pi\xi$, donc $B(\xi) = \pi\xi^2$ convient : $F(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2}$. De plus, $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G = 1$, donc $C = 1$.

(3 points)

Problème 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $c_n := \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$. Montrer que $c_n \geq 1/(n+1)$.

Indication : $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$.

Par parité, $c_n = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^1 (1-x^2)^n x dx$ (parce que $1 \geq x \geq 0$), et en posant $u = 1-x^2$, $c_n \geq \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$.

(3 points)

2) On pose

$$L_{1/n}(x) := \frac{(1-x^2)^n}{c_n} \text{ pour } |x| \leq 1, \quad L_{1/n}(x) := 0 \text{ pour } |x| \geq 1.$$

Montrer que $(L_{1/n})_{1/n}$ définit une identité approchée.

Attention : ici, il faut remplacer les δ de la définition habituelle par $1/n$. Mais on a les mêmes propriétés que celles qu'on a vues dans le cours.

Clairement, $L_{1/n}(x) \geq 0$ et le choix de c_n assure que $\int_{-\infty}^{+\infty} L_{1/n}(x)dx = \int_{-1}^{1} L_{1/n}(x)dx = \frac{c_n}{c_n} = 1$.

Enfin, $\int_{|x|\geq\eta} L_{1/n}(x)dx = 0$ si $\eta \geq 1$ et $= 2\frac{1}{c_n}\int_\eta^1 (1-x^2)^n dx$ si $\eta < 1$. Mais

$$2\frac{1}{c_n}\int_\eta^1 (1-x^2)^n dx \leq (n+1)(1-\eta^2)^n \to 0$$

par croissances comparées.

(4 points)

3) a) On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer en utilisant un résultat du cours que $L_{1/n} * f$ converge uniformément vers f.

La fonction f est continue et nulle en-dehors d'un intervalle borné. Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ elle est uniformément continue, et aussi en-dehors puisque constante. La fonction f est aussi bornée. Donc $L_{1/n} * f$ est bien définie, et converge vers f par un théorème du cours, puisque L_n est une identité approchée. La convergence est uniforme parce que f est uniformément continue.

(2 points)

b) Montrer que $L_{1/n} * f$ coïncide avec une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Indication : montrer qu'on peut écrire $L_{1/n}(x-t) = \sum_{j=0}^{2n} a_j(t)x^j$, où les a_j sont des polynômes (en t) qu'on n'a pas besoin de calculer explicitement.

Si $|x| \leq \frac{1}{2}$, $L_{1/n} * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{1/n}(x-t)f(t)dt = \int_{-1/2}^{+1/2} L_{1/n}(x-t)f(t)dt$, donc $|x-t| \leq |x| + |t| \leq 1$, et donc pour ces valeurs

$$L_{1/n}(x-t) = \frac{1}{c_n}\left(1-(x-t)^2\right)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k,$$

pour des coefficients polynomiaux a_k que nous n'avons pas besoin de calculer précisément (on pourrait le faire avec la formule du binôme de Newton). Donc, par linéarité de l'intégrale, $L_{1/n} * f(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \int_{-1/2}^{+1/2} a_k(t)f(t)dt$, qui est un polynôme en x.

Une autre démonstration serait de dériver $\int_{-1/2}^{+1/2} \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k\right) f(t)dt$ par rapport à x jusqu'à l'ordre $2n+1$ en utilisant les propriétés du produit de convolution (une fois qu'on les a vues), constater que cette dérivée est nulle, et donc qu'on a affaire à un polynôme.

Finalement, en restreignant le résultat de convergence à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a obtenu une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(4 points)

4) a) Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a,b]$, est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a,b]$. Indication : faire un changement de variable affine.

Posons $\varphi(x) := \frac{1}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})$; c'est une bijection sur $\mathbb{R}$ et $\varphi([a,b]) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Si g est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[a,b]$, posons $g_1 := g \circ \varphi^{-1}$. Alors g_1 est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. D'après la question 1.3, $L_{1/n} * g_1$ converge uniformément vers g_1, et on voit facilement que $(L_{1/n} * g_1) \circ \varphi$ coïncide avec un polynôme sur $[a,b]$ (parce que φ est un polynôme et que la composition de deux polynômes est un polynôme) et converge uniformément vers $g_1 \circ \varphi = g$ sur cet intervalle.

(2 points)

b) Montrer le Théorème de Weierstrass : toute fonction h continue sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de (restrictions à $[a,b]$) de fonctions polynomiales.

Indication : prolonger h en une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a-1, b+1]$.

Si g est seulement continue sur $[a,b]$, ses valeurs aux extrémités de l'intervalle ne sont pas nécessairement nulles. On définit g_2 par $g_2(x) = 0$ si $x \leq a-1$ ou $x \geq b+1$, $g_2(x) = g(x)$ si $a \leq x \leq b$, et g_2 affine sur les intervalles $[a-1, a]$ et $[b, b+1]$. On obtient ainsi une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a-1, b+1]$. D'après la première partie de la question, on trouve une suite de polynômes qui converge uniformément vers g_2 sur $[a-1, b+1]$, et donc en particulier vers g sur $[a,b]$.

(2 points)